

9.1. Докажите, что при любом действительном x , отличном от 0 и ± 1 , по крайней мере одно из чисел $x^2 + \frac{1}{x}$ и $x + \frac{1}{x^2}$ не является целым.

9.2. У Кати есть 10 карточек и игровой автомат. Для каждого i от 1 до 10 на i -ой карточке записаны два числа: $2i - 6$ и $i - 6$. Катя может вставить в автомат две карточки получить новую карточку взамен. Если на одной карточке были записаны числа a и b , а на второй записаны x и y , то на выданной автоматом карточке будут числа $ax + by$ и $ay + bx$. После нескольких таких обменов у Кати осталась одна карточка.

Какие числа могут быть на ней написаны?

9.3. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается стороны BC в точке D . Отрезок AL – биссектриса треугольника ABC . Луч ID пересекает описанную окружность Γ треугольника ABC в точке F . Оказалось, что $IA = IF$.

Докажите, что прямая FL проходит через центр окружности Γ .

9.4. Существует ли множество натуральных чисел M такое, что любая степень двойки представима в виде $a - b$, где $a, b \in M$, ровно одним способом, а любое другое натуральное число представимо в этом виде хотя бы двумя способами?