

10.1. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC угол при вершине C наименьший. Высоты, проведённые из вершин A и C пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1 и C_1 , а биссектриса, проведённая из вершины B - в точке B_1 .

Докажите, что если $AA_1 = BB_1$, то $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

10.2. В летнем лагере отдыхает n детей. Старший вожатый каждый день назначает трёх дежурных: главного дежурного и двух его помощников. При этом он хочет составить расписание таким образом, чтобы для любых двух детей был ровно один день, в который один из них (не важно который) был главным дежурным, а другой – его помощником.

Найдите все натуральные значения $n \geq 3$, при которых это возможно.

10.3. Назовём рациональное число r *почти простым*, если оно имеет вид $\frac{p}{s}$, где $p > 7$ – некоторое простое число, а s – сумма цифр числа p в десятичной записи.

а) Может ли произведение двух почти простых чисел оказаться почти простым числом?

б) Может ли сумма двух почти простых чисел оказаться почти простым числом?

10.4. Даны три функции $f_1(x) = \sin(x + 20^\circ)$, $f_2(x) = \sin(40^\circ - x)$, $f_3(x) = \sin(x - 100^\circ)$ и три действительных числа x_1, x_2, x_3 .

Докажите, что для некоторой перестановки y_1, y_2, y_3 чисел x_1, x_2, x_3 выполнено неравенство

$$f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3) \geq 0.$$