

11.5. Обозначим через $\mathbb{R}_{>0}$ множество всех положительных вещественных чисел. Найдите все функции $f(x)$, определённые на $\mathbb{R}_{>0}$ и принимающие значения из $\mathbb{R}_{>0}$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ верно равенство

$$f(x) = f(x + y)(yf(x) + 1).$$

11.6. Дан остроугольный треугольник ABC . Точка D выбрана на продолжении высоты AH за точку H так, что $\angle BDC = 90^\circ$. Точка F лежит на луче DB так, что $\angle FAC > 90^\circ$ и FC – биссектриса угла AFB . Прямые AB и CF пересекаются в точке G . На луче BF нашлась точка X , для которой верно равенство $GD = GX$.

Докажите, что описанные окружности треугольников CDF , FXG и AHC пересекаются в одной точке.

11.7. В ряд в некотором порядке выписаны числа $1, 2, \dots, 1024$, каждое по разу. За ход разрешено выбрать записанные числа a и b такие, что a левее b и между числами a и b записано ровно одно число, стереть числа a и b и на месте числа b записать число $a + b$.

Для любой ли изначальной расстановки чисел можно сделать 1022 хода так, чтобы на доске остались два равных числа?

11.8. Натуральное число ℓ назовём k –звёздным, если оно меньше 2^k и для каждого натурального числа $m < k$ остаток от деления числа ℓ на 2^m не равен $\frac{2^m - 1}{2^k - 1} \cdot \ell$.

Пусть p – некоторое простое число, а $n > 1$ – натуральное число, не кратное p . Докажите, что суммарное количество n –звёздных и np –звёздных чисел делится на 2^p .