

10.5. Про три попарно различных действительных числа x, y, z известно, что

$$x^3 - 3x^2 - yz = y^3 - 3y^2 - zx = z^3 - 3z^2 - xy.$$

Найдите все возможные значения выражения $x^2 - 4x - yz$.

10.6. Набор целых неотрицательных чисел назовём *табличным*, если существует прямоугольная таблица, в каждую клетку которой можно вписать один из знаков „+” и „−” так, чтобы было выполнено условие: если вычислить в каждом столбце количество плюсов, а в каждой строке – количество минусов, то все полученные числа вместе и будут образовывать в каком-то порядке данный набор. (Не все числа набора должны быть различны.)

Для каждого натурального числа n определите, какое наименьшее количество чисел можно приписать к набору

$$0, 2, 4, \dots, 2n - 2, 2n$$

так, чтобы получить табличный набор.

10.7. На сторонах AB , AC и BC треугольника ABC с углом при вершине A , равным 60° , выбраны точки F , E и D так, что $AEDF$ – ромб.

Докажите, что $2 \cdot AD \leq BE + CF$.

10.8. Пусть a – нечётное натуральное число, большее 1. У Мику есть чашечные весы и бесконечное количество гирек двух цветов: красные гириками массами $a, a^2, a^3, a^4, \dots$ и синие гириками массами $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ (для каждого натурального m у Мику есть ровно одна красная гирька массой a^m и ровно одна синяя гирька массой 2^m).

Докажите, что для каждого натурального числа n Мику может положить на левую чашу весов несколько синих гирек, а на правую чашу весов – несколько красных гирек таким образом, чтобы весы были в равновесии и количество гирек на каждой из чаш весов делилось на n .