

10.1. Точка I – центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC , в котором $AB < AC$. Прямая, проходящая через точку I перпендикулярно прямой AI , пересекает прямые AB и BC в точках D и E соответственно.

Докажите, что описанные окружности треугольников BDE и BIC касаются друг друга.

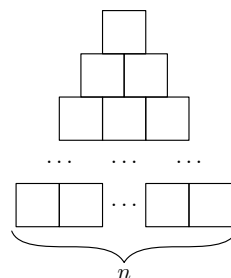
10.2. Найдите все арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел и имеющие чётную длину, не меньшую четырёх, для которых существует перестановка $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ всех её членов такая, что

$$(x_1 + 2)(x_2 + 2) \dots (x_n + 2) = x_{n+1}x_{n+2} \dots x_{2n} + 7.$$

10.3. Докажите, что для всех натуральных чисел m, n и вещественного $x > 0$ верно неравенство

$$(x^{m+n-1} + \dots + x + 1)^2 \leq \frac{(m+n)^2}{4mn} (x^{2m-1} + \dots + x + 1)(x^{2n-1} + \dots + x + 1).$$

10.4. *Пирамидкой высоты n* назовём клетчатую фигуру, изображённую на рисунке справа (нижний ряд состоит из n клеток). Пирамидку высоты n заполнили целыми числами так, что для каждой клетки, расположенной не в нижнем ряду, число, которое в неё записали, равно сумме чисел, записанных в две клетки, расположенные непосредственно под ней.



Для каждого натурального числа $n \geq 2$ найдите наибольшее возможное количество нечётных чисел в пирамидке высоты n .