

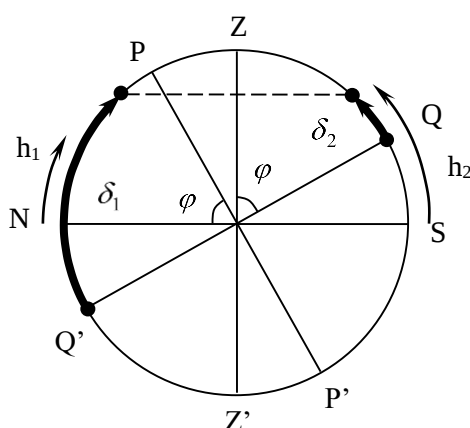
ВАРИАНТ 1

ЗАДАНИЕ 1 НЕБЕСНАЯ СФЕРА

Две звезды с координатами $\alpha_1 = 18^h$, $\delta_1 = 40^\circ$ и $\alpha_2 = 6^h$, $\delta_2 = 10^\circ$ наблюдались одновременно на одном альмукантате, одна в верхней кульминации, а другая в нижней.

- А) На какой широте проводились наблюдения?
 - Б) В какой момент звездного времени проводились наблюдения?
 - В) В какое время года возможно проведение наблюдения?
 - Г) Если предположить, что наблюдения проводились 21 марта, то где будет находиться Солнце?
 - Д) На каких широтах первая звезда является незаходящей?
 - Е) Видимые звездные величины двух звезд в желтых лучах одинаковы и равны $m_v = 7,2$, а в синих лучах различны и равны $m_{B1} = 7,0$, $m_{B2} = 8,5$ соответственно. Определить их основные показатели цвета.
 - Ж) Какая звезда и во сколько раз излучает больше энергии в синих лучах? Считать, что звезды находятся на одном и том же расстоянии от наблюдателя.
- 3) Найти разницу зенитных расстояний первой звезды при ее разноименных кульминациях.

Решение задачи 1. Небесная сфера. (20 баллов)



А) (2 балла) Изобразим сечение небесной сферы в плоскости небесного меридиана. Обозначаем их склонения δ_1 и δ_2 а высоты над горизонтом h_1 и h_2 , географическую широту φ . Так как они находятся на одном альмукантате, то $h_1 = h_2$. Из рисунка находим

$$h_1 = \delta_1 - (90^\circ - \varphi) = \delta_1 + \varphi - 90^\circ;$$

$$h_2 = \delta_2 + (90^\circ - \varphi) = \delta_2 - \varphi + 90^\circ;$$

$$\delta_1 + \varphi - 90^\circ = \delta_2 - \varphi + 90^\circ; \quad \varphi = 90^\circ + \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = 75^\circ.$$

Б) (2 балла) В момент верхней кульминации светила звездное время $s = \alpha$. В верхней кульминации находится второе светило, значит $s = 6^h$.

В) (2 балла) Наблюдения проводились зимой, поздней осенью или ранней весной. Летом проводить их невозможно, так как на столь высоких широтах бывают белые ночи и звезд не видно.

Г) (2 балла) Из условия задачи следует, что описанное в ней событие происходит 21 марта. Солнце в это время находится в точке весеннего равноденствия. Так, как прямое восхождение второй звезды 6 часов, и она находится в верхней кульминации, то Солнце будет находиться в точке заката, на горизонте, в точке захода.

Д) (2 балла) Незаходящая звезда в нижней кульминации находится в точке Севера (N) или выше.

Значит $90^\circ - \varphi = \delta_1 = 40^\circ$. Откуда $\varphi = 50^\circ$. Таким образом, первая звезда будет незаходящей на широтах лежащих в диапазоне $50^\circ - 90^\circ$.

Е) (4 балла) Основной показатель цвета 1-й звезды будет равен $B - V = 7,0 - 7,2 = -0,2$, второй звезды $B - V = 8,5 - 7,2 = 1,3$.

Ж) (4 балла) Так, как звездная величина 1-й звезды меньше второй то

$$\frac{E_1}{E_2} = 2,512^{(B-V)_2 - (B-V)_1} = 2,512^{1,5} = 4.$$

Первая звезда излучает энергии в 4 раза больше чем 2-я.

З) (2 балла) Изобразим сечение небесной сферы в плоскости небесного меридиана и обозначим зенитное расстояние некоторого светила в верхней (z_B) и нижней (z_H) кульминации. Также обозначим географическую широту места наблюдения φ и склонение светила δ в обеих кульминациях. Тогда из рисунка следует:

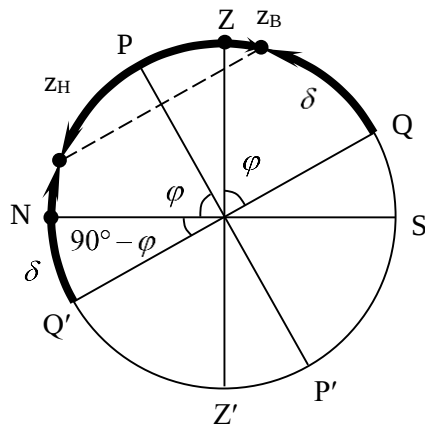


Рис.

$$z_B = \varphi - \delta,$$

$$z_H = 90^\circ - [\delta - (90^\circ - \varphi)] = 180^\circ - \delta - \varphi;$$

$$z_B - z_H = (\varphi - \delta) - (180^\circ - \delta - \varphi) = 2\varphi - 180^\circ = -30^\circ.$$

ЗАДАНИЕ 2 СОБСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Длительные наблюдения некоторого светила показали, что оно всё время находится на эклиптике, а его склонение с течением времени изменяется согласно выражению $\delta(t) = 63270 + 3t$, где склонение δ измеряется в угловых секундах, а время t измеряется в годах.

а) Учитывая современное значение прямого восхождения светила $\alpha_0 = 3^h07^m44,4^s$, определите позиционный угол θ собственного движения этого светила (ответ дайте с точностью до десятых долей углового градуса).

б) Вычислите, каким будет прямое восхождение α_τ светила через $\tau = 1000$ лет (ответ приведите с точностью до десятых долей секунды).

в) Определите зависимость эклиптической долготы λ (в угловых секундах) от времени t (в годах).

г) Найдите угол годичной аберрации β светила (с точностью до десятых долей угловой секунды) в день зимнего солнцестояния, пользуясь современными координатами светила.

Примечание: используйте угол наклона эклиптики к экватору, равный $\varepsilon = 23^\circ26,4'$.

Решение (20 баллов)

а) **(6 баллов)** Из зависимости $\delta(t)$ найдем современное значение склонения при $t_0 = 0$:

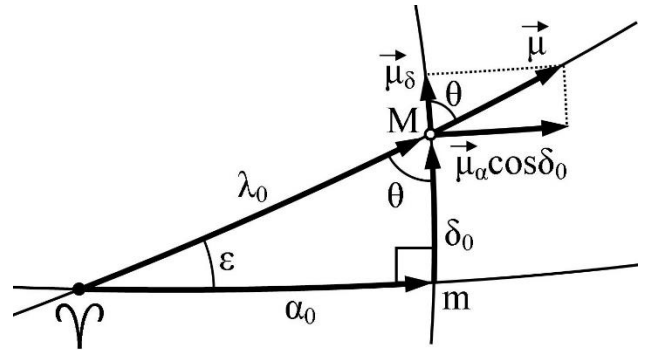
$$\delta(0) = \delta_0 = 63270'' = 17,575^\circ.$$

Для сферического треугольника $\gamma m M$ запишем:

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \theta} = \frac{\sin \delta_0}{\sin \varepsilon}$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \delta_0} \sin \varepsilon = 0,9625.$$

$$\theta = 74,3^\circ$$



б) **(6 баллов)** Из зависимости $\delta(t)$ получаем, что $\mu_\delta = 3''/\text{год}$. Определим собственное движение по прямому восхождению:

$$\mu_\alpha \cos \delta_0 = \mu_\delta \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \mu_\alpha = \frac{\mu_\delta \operatorname{tg} \theta}{\cos \delta_0} = 11,17''/\text{год}.$$

$$\mu_\alpha = \frac{\alpha_\tau - \alpha_0}{\tau} \Rightarrow \alpha_\tau = \alpha_0 + \mu_\alpha \tau = 3^h 20^m 9,0^s.$$

в) **(4 балла)** Так как светило в процессе движения всё время остается на эклиптике, то полное собственное движение есть быстрота изменения эклиптической долготы светила, т.е.

$$\mu = \frac{\lambda - \lambda_0}{t - t_0}.$$

Зависимость $\lambda(t)$ примет вид $\lambda(t) = \lambda_0 + \mu t$, где $\lambda_0 = \arcsin \frac{\sin \delta_0}{\sin \varepsilon} = 49,38^\circ$ — современное значение эклиптической долготы, $\mu = \frac{\mu_\delta}{\cos \theta} = 11,06''/\text{год}$. Тогда окончательно получим:

$$\lambda(t) = 177779,88 + 11,06t.$$

г) **(4 балла)** В день зимнего солнцестояния эклиптическая долгота Солнца равна $\lambda_c = 270^\circ$, следовательно, угол между направлением вектора скорости Земли и направлением на светило равен $\gamma = 180^\circ - \lambda_0 = 130,62^\circ$. Тогда угол годичной аберрации составит

$$\beta = 206264,8 \frac{v}{c} \sin \gamma = 15,6'',$$

где $v = \sqrt{GM_c/a} = 29,87 \text{ км/с}$ — орбитальная скорость Земли.

Ответ: а) $\theta = 74,3^\circ$; б) $\alpha_\tau = 3^h 20^m 9,0^s$;
в) $\lambda(t) = 177779,88 + 11,06t$; г) $\beta = 15,6''$.

ЗАДАНИЕ 3 СОУДАРЕНИЕ АСТЕРОИДОВ

Астероид «Ксенодимос» движется по параболической траектории. Когда угол истинной аномалии астероида составил $\theta_0 = 72,5^\circ$, его орбитальная скорость имела значение $v_0 = 22,5$ км/с. В этот момент из-за соударения с другим астероидом он изменил траекторию на эллиптическую с перигелием, расположенным диаметрально противоположно перигелию начальной траектории на таком же расстоянии от Солнца. После соударения движение астероида «Ксенодимос» по эллиптической орбите происходит с увеличением его кинетической энергии.

- а) Определите эксцентриситет e эллиптической орбиты.
- б) Вычислите перигелийное расстояние q (в а.е.).
- в) Найдите, на какой угол $\Delta\alpha$ (в угловых градусах) изменилось направление вектора орбитальной скорости астероида «Ксенодимос».
- г) Вычислите величину изменения скорости Δv (в км/с) астероида.

Решение (20 баллов)

а) (4 балла) Уравнения параболической и эллиптической орбит астероида в полярных координатах имеют вид, соответственно

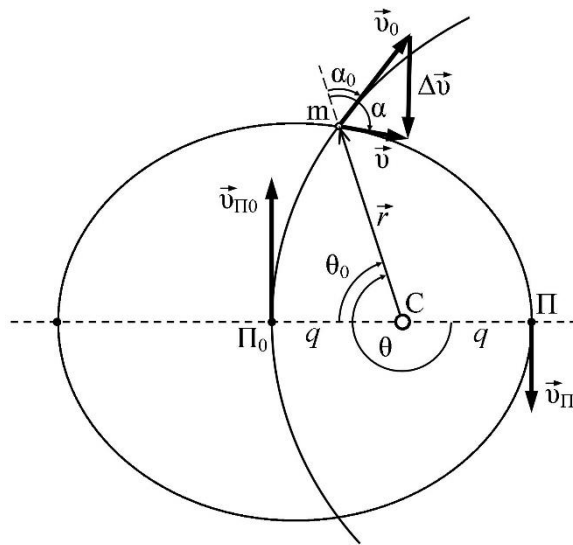
$$r = \frac{2q}{1 + \cos \theta_0} \quad \text{и} \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta},$$

где $\theta = \theta_0 + \pi$ – угол истинной аномалии эллиптической орбиты, $q = a(1 - e)$ – перигелийное расстояние эллиптической орбиты (см. рисунок). В момент соударения астероидов будет выполняться равенство:

$$\frac{2q}{1 + \cos \theta_0} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 - e \cos \theta_0},$$

откуда получаем

$$e = \frac{1 - \cos \theta_0}{1 + 3 \cos \theta_0} = 0,368.$$



б) (6 баллов) Из уравнения эллиптической орбиты в полярных координатах находим ее большую полуось

$$a = r \frac{1 - e \cos \theta_0}{1 - e^2} = 3,62 \text{ а.е.}, \text{ где } r = \frac{2GM}{v_0^2} = 3,52 \text{ а.е.}$$

$$\text{Тогда } q = a(1 - e) = r \frac{1 - e \cos \theta_0}{1 + e} = 2,29 \text{ а.е.}$$

в) (6 баллов) Используя закон сохранения момента импульса, найдем в точке соударения угол α_0 между направлением радиус-вектора $\vec{r}$ астероида и вектора его скорости $\vec{v}_0$ при движении по параболической траектории:

$$v_{\Pi 0} q = v_0 r \sin \alpha_0,$$

где $v_{\Pi 0} = \sqrt{2GM/q}$ – скорость астероида в перигелии параболической орбиты. В итоге находим $\alpha_0 = 53,71^\circ$.

Для эллиптической орбиты применение закона сохранения момента импульса дает соотношение

$$v_{\Pi} q = v r \sin \alpha,$$

где $v_{\Pi} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 23,1 \text{ км/с}$ – скорость астероида в перигелии эллиптической

орбиты, $v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = 16,14 \text{ км/с}$ – скорость астероида на эллиптической

орбите непосредственно после соударения. Необходимо отметить, что при движении астероида по эллиптической орбите при $r = a$ вектор скорости направлен параллельно большой оси эллипса. В нашем случае $r < a$, и вектор скорости $\vec{v}$ будет наклонен к большой оси эллипса. Как видно из рисунка, угол α должен быть больше $\pi/2$. Вычисления же дают значение угла $\alpha = 68,61^\circ$, что связано с выполнением равенства $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$. Следовательно, угол α

между направлением радиус-вектора $\vec{r}$ и вектора скорости $\vec{v}$ равен $\pi - 68,61^\circ = 111,39^\circ$. Тогда изменение угла равно $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0 = 57,68^\circ$.

г) (4 балла) Из рисунка следует, что $\Delta v = \sqrt{v_0^2 + v^2 - 2vv_0 \cos \Delta\alpha} = 19,45 \text{ км/с}$.

Ответ: а) $e = 0,368$; б) $q = 2,29 \text{ а.е.}$;

в) $\Delta\alpha = 57,68^\circ$; г) $\Delta v = 19,45 \text{ км/с}$.

ЗАДАНИЕ 4 КОСМОЛОГИЧЕСКОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ

Космический телескоп «Джеймс Уэбб» работает в инфракрасном диапазоне. Одной из основных его целей является изучение объектов дальнего космоса, имеющих больших значения красного смещения. Данные, полученные при наблюдении с помощью данного телескопа далеких галактик, позволили определить значение постоянной Хаббла $H = 70 \text{ км/с} / \text{Мпк}$. При этом геометрия Вселенной предполагается плоской. Также из данных получено, что в современную эпоху плотность обычной материи (вещества) составляет 18% от плотности темной материи, а плотность темной материи составляет 14% от плотности темной энергии (все величины здесь измерены в одних и тех же единицах). Гравитационную постоянную считать равной $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н м}^2 / \text{кг}^2$, $1 \text{ пк} = 3,1 \times 10^{16} \text{ м}$.

а) Определите значения плотности обычной материи ρ_0 , плотности темной материи $\rho_{\text{ТМ}}$, а также плотности темной энергии $\rho_{\text{ТЕ}}$ (в $\text{кг} / \text{м}^3$), в современную эпоху.

б) С помощью телескопа «Джеймс Уэбб» была обнаружена галактика, имеющая красное смещение $z=4,2$. Будем считать, что это красное смещение имеет чисто космологическую природу. Определите, какое значение имели плотность обычной материи $(\rho_0)_z$, плотность темной материи $(\rho_{\text{ТМ}})_z$, а также плотность темной энергии $(\rho_{\text{ТЕ}})_z$ (в $\text{кг} / \text{м}^3$), в эпоху, когда галактикой было испущено это излучение, наблюдаемое сейчас с помощью телескопа.

в) Определите, сколько лет назад было испущено излучение галактики из п. б, наблюдаемое сейчас с помощью телескопа «Джеймс Уэбб». Возраст Вселенной считать равным 13,2 млрд. лет.

Решение (20 баллов)

а) (6 баллов) Так как геометрия Вселенной предполагается плоской, то общая плотность должна быть равна критической:

$$\rho_0 + \rho_{\text{ТМ}} + \rho_{\text{ТЕ}} = \frac{3H^2}{8\pi G} = 9,1 \cdot 10^{-27} \text{ кг} / \text{м}^3.$$

Учитывая, что $\rho_{\text{ТМ}} = 0,14\rho_{\text{ТЕ}}$, $\rho_0 = 0,18 \cdot 0,14 \rho_{\text{ТЕ}}$, получим:
 $\rho_{\text{ТЕ}} = 7,8 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{\text{ТМ}} = 1,1 \text{ кг/м}^3$, $\rho_0 = 0,20 \text{ кг/м}^3$.

б) (6 баллов) Получим:

$$\begin{aligned}(\rho_0)_z &= (1+z)^3 \rho_0 = 28,1 \text{ кг/м}^3; \\ (\rho_{\text{ТМ}})_z &= (1+z)^3 \rho_{\text{ТМ}} = 155 \text{ кг/м}^3; \\ (\rho_{\text{ТЕ}})_z &= \rho_{\text{ТЕ}} = 7,8 \text{ кг/м}^3;\end{aligned}$$

в) (8 баллов) В плоской геометрии имеем:

$$a \sim (z+1)^{-1} \sim t^{3/2}.$$

Таким образом, время испускания излучения галактикой $t_{\text{и}}$:

$$t_{\text{и}} = t_{\text{В}}/(z+1)^{2/3} = 4,4 \text{ млрд. лет.}$$

Следовательно, излучение испущено 13,2-4,4=8,8 млрд. лет назад.

Ответ: а) $\rho_{\text{ТЕ}} = 7,8 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{\text{ТМ}} = 1,1 \text{ кг/м}^3$, $\rho_0 = 0,20 \text{ кг/м}^3$;
б) $(\rho_{\text{ТЕ}})_z = 7,8 \text{ кг/м}^3$, $(\rho_{\text{ТМ}})_z = 155 \text{ кг/м}^3$, $(\rho_0)_z = 28,1 \text{ кг/м}^3$ в) 8,8 млрд. лет назад.

ЗАДАНИЕ 5 ЦЕФЕИДА

Цефеидами называют звезды, регулярное изменение блеска которых вызвано периодическими изменениями размера звезды (колебаниями). Эти звезды интересны тем, что для них существует четкая зависимость между абсолютной звездной величиной в максимуме блеска M и периодом колебаний звезды T , выраженным в сутках:

$$M = -1.43 - 2,81 \lg(T).$$

Астрономы наблюдают цефеиду, видимый блеск которой в максимуме составляет $8,4^m$, а в минимуме $10,2^m$ Период изменения блеска звезды составляет $T=8,3$ суток.

Постоянную Стефана-Больцмана считать равной

$$\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \text{град}^4, \text{ светимость Солнца } L_{\odot} = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ Вт},$$

абсолютную звездную величину Солнца $M_{\odot} = 4,7$.

а) Используя связь между периодом колебаний блеска цефеиды и ее блеском в максимуме, определите максимальную светимость цефеиды (в Вт).

б) Определите расстояние D , на котором находится цефеида. Межзвездное поглощение считать равным $1,5^m/\text{кпк}$.

Указание: полученное для D уравнение можно приближенно решить методом «подбора», или графически, построив график соответствующей функции.

в) Оценить, в каких пределах меняется радиус цефеиды. Считать, что в минимуме блеска температура звезды $t_1 = 8000$ К, а в максимуме $t_2 = 10\,000$ К.

Решение (20 баллов)

а) (6 баллов). В начале найдем абсолютную звездную величину цефеиды. На основании приведенной формулы:

$$M = -1.43 - 2.81 \log(8.3) = -4.0.$$

Тогда светимость цефеиды:

$$L = L_{\odot} 10^{0.4(M_{\odot} - M)} = 11.5 \cdot 10^{29} \text{ Вт}.$$

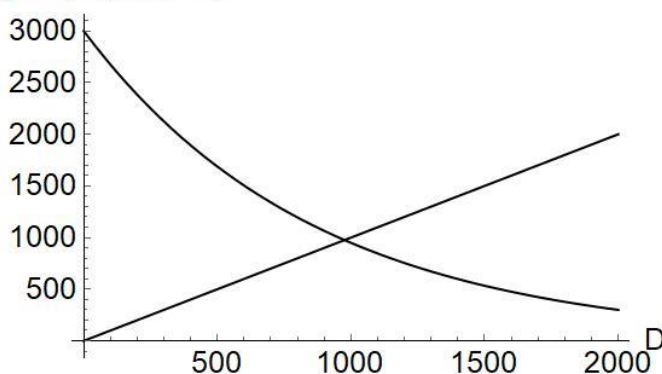
б) (6 баллов). Найдем расстояние до звезды D_0 без учета поглощения:

$$D_0 = 10^{1 - (M - m)/5} = 3 \text{ кпк}.$$

Чтобы учесть межзвездное поглощение поступим следующим образом. Эффективная звездная величина, которую мы видели бы в отсутствии среды $m_{\text{эфф}} = m - 0.0015D$. Таким образом:

$$D = 10^{1 - (M - m_{\text{эфф}})/5} = D_0 \cdot 10^{-0.0005 D}.$$

Полученное уравнение можно приближенно решить методом «подбора», но лучше построить графики обеих частей равенства. Ясно, что D лежит между 0 и D_0 . Построим графики левой и правой частей уравнения: $D, D_0 10^{(-0.0005 D)}$



Из графика получим приближенное решение $D \approx 1$ кпк.

в) (8 баллов) В максимуме блеска мы можем использовать значение светимости из п. а). Запишем закон Стефана-Больцмана:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Таким образом, радиус звезды:

$$R_2 = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma t_2^4}} = 1.3 \cdot 10^{10} \text{ м}.$$

Сравнивая видимый блеск звезды в фазах сжатия и расширения, получим:

$$10,2 - 8,4 = -2,5 \lg \left(\frac{R_1^2 T_1^4}{R_2^2 T_2^4} \right) \Rightarrow$$

$$R_1 = R_2 \frac{T_2^2}{T_1^2} 10^{-0,36} = 0,87 \cdot 10^{10} \text{ м.}$$

Ответ: а) $11,5 \cdot 10^{29} \text{ Вт}$. б) 1кпк, в) от $0,87 \cdot 10^{10} \text{ м}$ до $1,3 \cdot 10^{10} \text{ м}$.