ВАРИАНТ 1

ЗАДАНИЕ 1
АЗИМУТ ЗВЕЗДЫ

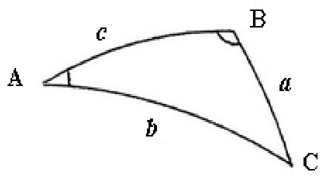
Звезда α-Волопаса склонение которой δ =+19º36′ наблюдалась в Могилеве в некоторый момент времени. Ее часовой угол в этот момент составлял t = 48º31′.

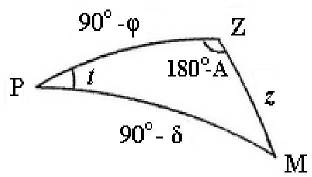
А). Вычислить зенитное расстояние и азимут α-Волопаса в момент наблюдения. Географическую широту Могилева принять равной φ = 53º42′.

Б). Найти разницу зенитных расстояний α-Волопаса при ее разноименных кульминациях, если верхняя кульминация наблюдалась на юге от зенита.

В). Определить звездное время в Могилеве, географическая долгота которого λ = 30º21′ в восемь часов вечера 28 апреля.

Решение (20 баллов)
А).
Судя по экваториальным координатам, звезда находится в западной половине небесной сферы. Изобразим параллактический треугольник для нашей звезды. Для преобразования экваториальных координат в горизонтальные применим формулы сферического треугольника:





$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A, \qquad (1)$$
$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A, \qquad (2)$$
$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A, \qquad (3)$$

где a, b, c – стороны треугольника, а $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – противолежащие его углы (и стороны и углы выражаются в градусах).

Положим $a = z$, $\angle A = t$, $b = 90^o – \delta$, $\angle B = 180^o – A$ и $c = 90^o – \varphi$ и подставим их в вышеприведенные формулы. Получим:

$$\cos z = \cos(90° - \delta) \cdot \cos(90° + \varphi) +$$
$$+ \sin(90° - \delta) \cdot \sin(90° - \varphi) \cdot \cos t, \qquad (4)$$
$$\sin z \cdot \cos(180° - A) = \cos(90° - \delta) \cdot \sin(90° - \delta) -$$
$$- \sin(90° - \delta) \cdot \cos(90° - \varphi) \cdot \cos t, \qquad (5)$$
$$\sin z \cdot \sin(180° - A) = \sin(90° - \delta) \cdot \sin t, \qquad (6)$$

которые после упрощения принимают вид:

$$\cos z = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t \qquad (7)$$

$$\sin z \cdot \cos A = -\sin\delta \cdot \cos\varphi + \cos\delta \cdot \sin\varphi \cdot \cos t \qquad (8)$$

$$\sin z \cdot \sin A = \cos\varphi \cdot \sin t \qquad (9)$$

Теперь найдем зенитное расстояние из (7):

$\cos z = \sin 53^o42' \cdot \sin 19^o36' + \cos 53^o42' \cdot \cos 19^o36' \cdot \cos 48^o31' =$

$= 0{,}806 \cdot 0{,}335 + 0{,}592 \cdot 0{,}942 \cdot 0{,}662 = 0{,}27 + 0{,}369 = 0{,}639$. Откуда $z = 50^o17'$.**(5 баллов)**

Азимут найдем из формулы (9):

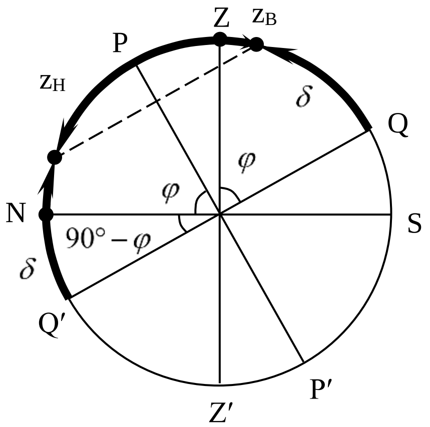
$\sin A = \cos 19°36' \cdot \sin 48°31' / \sin 50°17' = 0{,}942 \cdot 0{,}749 / 0{,}769 = 0{,}918$.

Тогда $A = 66^o34'$ или 4^h26^m. **(5 баллов)**

Примечание: *Формула (8) (ее называют формулой пяти элементов) для решения данной задачи не понадобилась.*

Б).

Изобразим сечение небесной сферы в плоскости небесного меридиана и обозначим зенитное расстояние некоторого светила в верхней (z_B) и нижней (z_H) кульминации. Также обозначим географическую широту места наблюдения φ и склонение светила δ в обеих кульминациях.



Тогда из рисунка следует:

$$z_B = \varphi - \delta\ ,$$

$$z_H = 90° - [\delta - (90° - \varphi)] = 180° - \delta - \varphi$$

$$z_B - z_H = (\varphi - \delta) - (180° - \delta - \varphi) = 2\varphi - 180° = -72^o36'$$ **(3 балла)**

В).

Местное среднее солнечное время в указанный момент равно $T_m = 8^h + 12^h = 20^h$. Это значит, что после средней полночи прошло 20^h. Этот промежуток времени выразим в единицах звездного времени. Это будет $K \cdot T_m$, где K – переводной коэффициент среднего времени в звездное. Он равен 1,002738. Если теперь определить звездное время в среднюю полночь на данном меридиане S, то в момент T_m звездное время будет $s = S + K \cdot T_m$.

В астрономических ежегодниках дается звездное время S_o для каждой полночи по среднему солнечному времени (средней полночи) на меридиане Гринвича. Зная S_o, можно вычислить S на любом другом меридиане, если известна его долгота λ.

$$S = S_0 - \frac{\lambda^h}{24^h} \cdot 3^m 56^s{,}55 \qquad (1)$$

Долгота λ отсчитывается положительной к востоку от Гринвича. Тогда формула для перевода местного среднего солнечного времени в звездное имеет вид:

$$s = S_0 - \frac{\lambda^h}{24^h} \cdot 3^m 56^s{,}55 + K \cdot T_m \qquad (2)$$

Для приближенных расчетов (с точностью до 5 минут) формулу (2) можно упростить. Для этого необходимо помнить, что звездное время в Гринвиче в среднюю полночь с 20 на 21 марта равно 12^h. Тогда в полночь любого другого дня звездное время будет равно $3^m56^s{,}55$, умноженное на число дней N, прошедших с 20 марта до данного дня, плюс 12^h.

$$S_0 = N \cdot 3^m 56^s{,}55 + 12^h \qquad (3)$$

Вторым членом в формуле (2) можно пренебречь (максимальное его значение может составлять $-3^m56^s{,}55$). Также коэффициент K можно положить равным единице (от этой операции максимальная внесенная ошибка может быть около $+4^m$). В итоге получим:

$$s \approx S_0 + T_m \approx N \cdot 3^m 56^s{,}55 + 12^h + T_m \qquad (4)$$

По этой формуле и рассчитаем звездное время в Могилеве.
$N = 39$, т.к. 28 апреля является 39-м днем после 20 марта. Тогда

$s \approx 39 \cdot 3^m 56^s{,}55 + 12^h + 20^h \approx 9^h 57^m 37^s$ **(7 баллов)**

Ответы: $z = 50^o17'$; $A = 4^h26^m$; $z_B - z_H = -72^o36'$; $s \approx 9^h 57^m 37^s$.

ЗАДАНИЕ 2
ЗВЕЗДА

Во время летнего солнцестояния в полночь, звезда, находящаяся в противостоянии с Солнцем, находится в зените. Ее высота в течение суток в данном месте изменяется от 0 до 90 градусов. Эта звезда находится на главной последовательности. Эффективная температура ее поверхности Т = 11000К.

А). Пренебрегая рефракцией, уравнением времени и аберрацией, определите эклиптические координаты звезды.

Б). Оцените ее радиус и массу (в единицах Солнца).

В). Оцените ее абсолютную звездную величину и полное время нахождения на главной последовательности (в годах).

Г). Определить, на каком расстоянии эта звезда имеет такую же видимую звездную величину, что и Солнце на расстоянии 30 пк?

Д). Во сколько раз радиус этой звезды больше радиуса соседней звезды, если максимумы в их спектрах излучения отличаются на 20%, а светимости в 20 раз? Звезды считать абсолютно черными телами.

Е). Наблюдатели каких географических широт можно будет наблюдать на небе эту звезду в верхней кульминации?

Примечание: 1). Наблюдения проводятся в Южном полушарии Земли.

2). Температура Солнца T_C = 5780 К, а его абсолютная звездная величина 4,8.

Решение (20 баллов)

А).

Во время летнего солнцестояния круг склонения и круг эклиптической широты Солнца будут совпадать. Поэтому прямые восхождения звезды и Солнца отличаются на 12^h. Высота звезды в верхней кульминации: h_B=90°, а в нижней h_H=0°. Тогда широта места наблюдения: $\phi = -(h_B+h_H)/2 = -45°$. Склонение звезды в зените равно географической высоте места наблюдения: $\delta = -45°$. Эклиптическая широта звезды: $\beta=\delta+\varepsilon= -21°34'$. Прямое восхождение звезды: $\alpha=\alpha_C+12^h=18^h$. Эклиптическая долгота звезды: $\lambda=270°$. **(6 баллов)**

Б).

Светимость звезды и Солнца:

$L=4\pi R^2\sigma T^4$, $L_C=4\pi R_C^2\sigma T_C^4$.

Зависимость радиус-светимость для звезды и Солнца:

$L=C_RR^{5.2}$, $L_C=C_RR_C^{5.2}$.

Из этого находим $R=2,235R_C$.

Зависимость масса-светимость для звезды и Солнца:

$L=C_mm^{3.9}$, $L_C=C_mm_C^{3.9}$ $\Rightarrow$ $m=2,922m_C$. **(4 балла)**

В).

Светимость звезды будет равна

$L=(R/R_C)^2\cdot(T/T_C)^4\,L_C=2,235^2\cdot(11000/5780)^4\,L_C=65,48L_C$.

Абсолютная звездная величина звезды:

$M=2,5\lg L-M_C=2,5\lg 35,27-4,8= -0,26$

Полное время нахождения звезды на главной последовательности будет:

$\tau \sim 10^{10}\,(m/m_C)\cdot(L_C/L)=4,6\cdot 10^8$ лет. **(2 балла)**

Г).

Видимая звездная величина Солнца на расстоянии 30 пк:

$m_C=M_C-5+5\lg 30=4,8-5+5\lg 30=7,185$.

Видимая звездная величина звезды на расстоянии r:

m=M−5+5lg r $\Rightarrow$ $r=10^{(m_c-M+5)/5}$ = 308,32 пк. **(2 балла)**

Д).

Светимость звезды определяется формулой:

$L=4\pi R^2\sigma T^4$

Из закона Вина: $T= b/\lambda_{MAX}$. Тогда:

$L_2/L_1 = (R_2/R_1)^2\cdot(T_2/T_1)^4 = (R_2/R_1)^2\cdot(\lambda_{MAX1}/\lambda_{MAX2})^4$.

а). Если максимум в спектре соседней звезды имеет большую длину волны чем в нашей то: $\lambda_{MAX2}=1{,}2\lambda_{MAX1}$, $L_2=20L_1$.

Тогда: $R_2/R_1= (L_2/L_1)^{0,5}\cdot(\lambda_{MAX2}/\lambda_{MAX1})^2=6{,}4$ **(2 балла)**

б). Если максимум в спектре нашей звезды имеет большую длину волны чем у соседней то: $\lambda_{MAX1}=1{,}2\lambda_{MAX2}$, $L_1=20L_2$.

Тогда: $R_2/R_1= (L_2/L_1)^{0,5}\cdot(\lambda_{MAX2}/\lambda_{MAX1})^2=3{,}1$ **(2 балла)**

Е).

Эту звезду можно будет наблюдаться на географических широтах

$-90^{o}\le \phi < 45^{o}$. **(2 балла)**

Ответы: β= -21°34'; λ=270°; $R=2{,}235R_C$; $m=2{,}922m_C$; M = -0,26; $t=4{,}6\cdot10^8$ лет; r=308,32 пк; $R_2/R_1=6{,}4$; $R_2/R_1=3{,}1$; $-90^{o}\le \phi < 45^{o}$.

ЗАДАНИЕ 3
ГРАВИТАЦИОННЫЙ МАНЕВР

Автоматическая межпланетная станция (АМС) земного происхождения входит в сферу действия Юпитера. Гелиоцентрическая скорость АМС в этот момент равна 7,43 км/с и сонаправлена с вектором орбитальной скорости Юпитера.

а) Вычислите большую полуось a орбиты АМС в сфере действия Юпитера.

б) Получите зависимость эксцентриситета e орбиты АМС в сфере действия Юпитера от значения прицельного параметра b, выраженного в единицах радиуса ρ сферы действия Юпитера, если эксцентриситет определяется выражением

$$e=\left(1+2\frac{\varepsilon l^2}{G^2M_{Ю}^2}\right)^{0,5},$$

где ε – удельная полная механическая энергия АМС в сфере действия Юпитера, l – удельный момент импульса АМС относительно Юпитера.

в) Определите угол φ между векторами юпитероцентрической скорости АМС при входе и выходе из сферы действия как функцию от параметра b, выраженного в единицах радиуса ρ.

г) Вычислите максимально возможное увеличение модуля гелиоцентрической скорости $\Delta\upsilon_{АСМ}$ межпланетной станции при таком гравитационном маневре.

Примечание: орбиту Юпитера считайте круговой с радиусом $a_Ю$ *= 5,2 а.е., его массу и радиус примите равными* $M_Ю = 318M_\oplus$ *и* $R_Ю = 11R_\oplus$ *соответственно; изменение гелиоцентрической скорости АМС при изменении прицельного параметра считайте пренебрежимо малым.*

Решение (20 баллов)

а) Радиус сферы действия определяется выражением $\rho = a_Ю \left(\dfrac{M_Ю}{M_С}\right)^{0,4} = 0,322$ а.е.

Входная скорость АМС в сферу действия Юпитера (скорость относительно Юпитера) равна $\upsilon_{вх} = \upsilon_Ю - \upsilon_{АМС} = 5,67$ км/с, где

$$\upsilon_Ю = \sqrt{\frac{GM_С}{a_Ю}} = 13,1 \text{ км/с}.$$

Удельная полная механическая энергия АМС в сфере действия Юпитера:

$$\varepsilon = \frac{\upsilon_{вх}^2}{2} - \frac{GM_Ю}{\rho} = -\frac{GM_Ю}{2a} = 13,444 \text{ МДж/кг}.$$

Большая полуось орбиты АМС в сфере действия Юпитера равна $a = -\dfrac{GM_Ю}{2\varepsilon} = -0,0315$ а.е. и определяется только входной скоростью и радиусом сферы действия (не зависит от прицельного параметра). (**3 балла**)

б) Удельный момент импульса АМС (момент импульса АМС, отнесенный к ее массе) равен

$$l = \upsilon_{вх}\rho\sin\alpha = \upsilon_{вх} b.$$

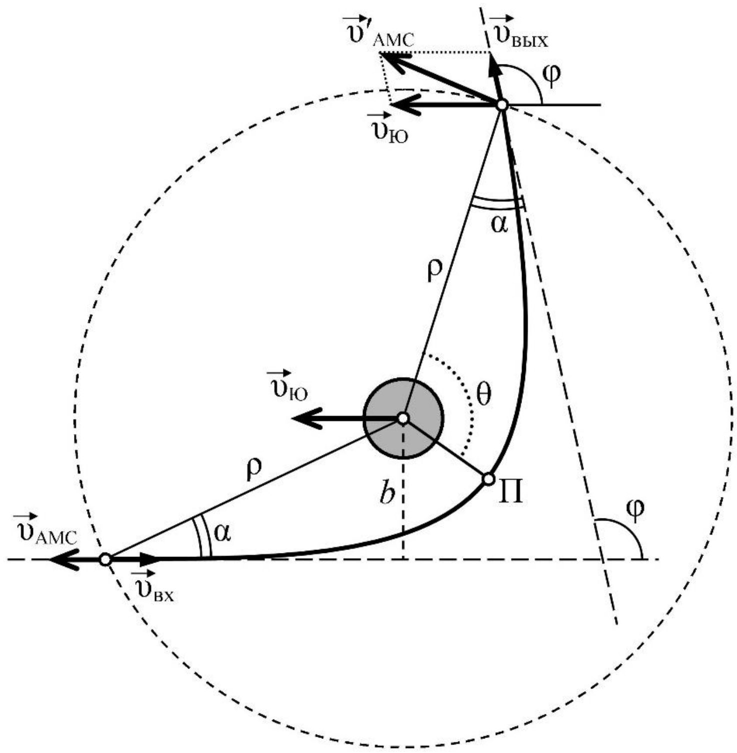
$$e(b) = \left(1 + \frac{2\varepsilon}{G^2 M_Ю^2}\upsilon_{вх}^2 b^2\right)^{0,5} \quad \text{или} \quad e(\tilde{b}) = \left(1 + 125\tilde{b}^2\right)^{0,5}, \text{ где } \tilde{b} = b/\rho.$$ (**3 балла**)

в) Из рисунка получаем $\varphi = 2\alpha + \beta$, где $\beta = 2\theta - 180^\circ$, следовательно $\varphi = 2\left(\alpha + \theta - 90^\circ\right)$. Также $\alpha(\tilde{b}) = \arcsin\left(\dfrac{b}{\rho}\right) = \arcsin(\tilde{b})$. Из уравнения кривых второго порядка в полярных координатах имеем: $r = \dfrac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cdot\cos\theta}$. При $r=\rho$ получим $\rho = \dfrac{a-a\left(e(\tilde{b})\right)^2}{1+e(\tilde{b})\cdot\cos\left(\theta(\tilde{b})\right)}$, откуда найдем

$$\theta\left(\tilde{b}\right) = \arccos\left(\frac{a\left(1-\left(e\left(\tilde{b}\right)\right)^2\right)-\rho}{\rho e\left(\tilde{b}\right)}\right).$$

В итоге зависимость угла φ от $\tilde{b}$ приобретает вид:

$$\varphi(\tilde{b}) = 2\left(\arcsin(\tilde{b}) + \arccos\left(\frac{a-a\left(e(\tilde{b})\right)^2-\rho}{\rho e(\tilde{b})}\right) - 90^\circ\right).$$ **(8 баллов)**



г) Увеличение гелиоцентрической скорости АМС при гравитационном маневре в сфере действия Юпитера обусловлено геометрическим сложением векторов скорости Юпитера и скорости АМС при выходе из сферы действия Юпитера: $\vec{\upsilon}'_{АМС} = \vec{\upsilon}_{Ю} + \vec{\upsilon}_{вых}$. По закону сохранения механической энергии выходная скорость АМС из сферы действия Юпитера будет равна входной скорости. Модуль вектора $\vec{\upsilon}'_{АМС}$ получим из теоремы косинусов:

$$\upsilon'_{\text{АМС}} = \sqrt{\upsilon_{\text{Ю}}^2 + \upsilon_{\text{вых}}^2 - 2\upsilon_{\text{Ю}}\upsilon_{\text{вых}}\cos\varphi},$$

где угол φ является функцией прицельного параметра b. Максимальное увеличение скорости АМС будет в том случае, когда угол φ будет стремиться к 180°. Это возможно при очень малом прицельном параметре. Минимальный прицельный параметр $b_{\text{мин}}$ можно определить из условия равенства перицентрического расстояния АМС радиусу Юпитера, из которого определяется эксцентриситет e' такой орбиты:

$$R_{\text{Ю}} = a(1 - e') \quad \rightarrow \quad e' = 1 - R_{\text{Ю}}/a = 1{,}0148.$$

Из зависимости $e(\tilde{b})$ получим $\tilde{b}_{\text{мин}} = 0{,}0155$ и $\varphi(\tilde{b}_{\text{мин}}) = 164{,}2^\circ$. Тогда $\Delta\upsilon_{\text{АМС}} = \upsilon'_{\text{АМС}} - \upsilon_{\text{АМС}} = 11{,}12$ км/с. **(6 баллов)**

ЗАДАНИЕ 4
ЛЯМБДА-CDM

Современной космологической моделью нестационарной Вселенной, удовлетворяющей уравнениям общей теории относительности, является модель Λ-CDM. Еще в 1998 году по результатам изучения сверхновых звезд в далеких галактиках было установлено ускоренное расширение Вселенной, которое в рамках модели ΛCDM объясняет ненулевое значение космологической постоянной Λ, по последним данным равное $1{,}0905 \cdot 10^{-52}$ м$^{-2}$. В теоретических моделях, описывающих однородную и изотропную расширяющуюся Вселенную, постоянная Хаббла H изменяется с течением времени, однако в каждый конкретный момент времени принимается одинаковой в каждой точке Вселенной и при этом связана с безразмерным масштабным фактором a соотношением

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)},$$

где $\dot{a}$ означает быстроту изменения масштабного фактора с течением времени. С другой стороны масштабный фактор a связан с наблюдаемым космологическим красным смещением z света в момент его излучения $t_{\text{изл}}$ соотношением:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_{\text{изл}})} - 1,$$

где $a(t_0) = 1$ – масштабный фактор в настоящее время t_0.

Эволюция во времени масштабного фактора a в рамках модели ΛCDM с учетом возможной положительной, отрицательной или нулевой кривизны k пространства описывается уравнением Фридмана, которое имеет в системе единиц СИ следующий вид:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_М - \frac{kc^2}{\left(a(t)\right)^2} + \frac{\Lambda c^2}{3},$$

где $\rho_М$ – плотность материи Вселенной (в том числе и темной материи).

а) В предположении плоской Вселенной вычислите параметр плотности материи $\Omega_М = \rho_М/\rho_{кр}$, приняв значение постоянной Хаббла, полученное по измерениям барионных акустических колебаний, равным 68,4 км/(Мпк·с). Здесь $\rho_{кр}$ – критическая плотность Вселенной.

б) Считая плотность обычной барионной материи равной $\rho_Б = 6{,}167\cdot10^{-9}$ $M_\odot$/пк^3 и пренебрегая вкладом излучения определите, какая доля плотности приходится на темную материю.

в) Рассматривая в первом приближении зависимость масштабного фактора от времени в виде $a(t_{изл}) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)\cdot(t_{изл} - t_0)$, получите зависимость $t_{изл}(z)$, приняв в качестве параметров время t_0 и хаббловское время $t_Н$.

г) На основании предыдущих пунктов определите время, прошедшее с момента рождения Вселенной до момента излучения света одним из самых удаленных квазаров, находящимся в галактике UHZ1 ($\alpha = 00^ч14^м16^с$; $\delta = -30°\ 22'\ 40{,}2''$; $z = 10{,}1$), а также скорость его удаления от наблюдателя в единицах скорости света.

Решение (20 баллов)

а) Для плоской Вселенной кривизна $k = 0$. Тогда уравнение Фридмана примет вид:

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_М + \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \quad \text{или} \quad 1 = \Omega_М + \frac{\Lambda c^2}{3H^2},$$

откуда $\Omega_М = 0{,}334$. (**4 балла**)

б) Плотность материи содержит плотность обычной барионной материи, плотность излучения и плотность темной материи: $\rho_М = \rho_Б + \rho_{изл} + \rho_{ТМ}$. Пренебрегая плотностью излучения, получим

$$\frac{\rho_{ТМ}}{\rho_М} = 1 - \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_Б\Omega_М^{-1} = 0{,}858.$$ **(4 балла)**

в) Из зависимости $a(t_{изл}) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)\cdot(t_{изл} - t_0)$ получим

$$\frac{a(t_{изл})}{a(t_0)} = 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\cdot(t_{изл} - t_0) \quad \text{или} \quad \frac{1}{1+z} = 1 + H(t_0)\cdot(t_{изл} - t_0) = 1 + \frac{t_{изл} - t_0}{t_H},$$

откуда находим

$$t_{изл} = t_0 - \frac{z}{1+z}t_H.$$ **(8 баллов)**

г) С учетом возраста Вселенной t_0 = 13,8·10^9 лет, используя зависимость $t_{изл}(z)$, получим $t_{изл}$ = 7,49·10^8 лет с момента рождения Вселенной. Скорость удаления галактики UHZ1 с квазаром от наблюдателя в единицах скорости света равна

$$\beta = \frac{\upsilon}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} = 0,984.$$ **(4 балла)**

ЗАДАНИЕ 5
СВЕРХНОВАЯ ТИПА IA

Сверхновые типа Ia выделяются среди других типов сверхновых тем, что имеют универсальных вид спектра излучения и величину светимости. Благодаря этому по ним можно довольно точно определять расстояния до галактик, в которых они наблюдаются. Механизм их возникновения следующий. Имеется двойная звезда, состоящая из белого карлика и массивной звезды. В процессе своей эволюции, массивная звезда начинает увеличиваться в размерах и превращается в красного гиганта. При этом вещество из нее перетекает на белый карлик. Как известно, белые карлики, имеющую массу $M > M_{\text{Чан}}$ (здесь $M_{\text{Чан}} \approx 1{,}4 M_{\odot}$ – предел Чандрасекара) являются неустойчивыми и коллапсируют с образованием нейтронной звезды. Это событие сопровождается взрывом сверхновой.

Рассмотрим простейшую модель данного сценария. Пусть масса белого карлика $M_{\text{БК}}$, а масса нормальной звезды $M_{\text{з}}$.Они движутся по круговой орбите, расстояние между компонентами равно D. Будем пренебрегать собственным вращением компонентов двойной системы и считать их точечными массами.

А). Выразить период обращения двойной звезды Т через $M_{\text{БК}}, M_{\text{з}}, D$ и гравитационную постоянную G.

Б). Выразить кинетическую энергию двойной звезды $E_{\text{к}}$ и полный момент импульса L через те же величины. Какую из полученных величин можно считать сохраняющейся в процессе аккреции (перетекания) вещества?

В). Пусть начальные значения параметров двойной звезды следующие: $(M_{\text{БК}})_0 = 1.2\ M_{\odot}, (M_{\text{з}})_0 = 8{,}0 M_{\odot}$, $D_0 = 1{,}1 \times 10^{11}$ м. Перетекание вещества звезды на белый карлик начинается, когда равнодействующая сил, действующих на некоторый малый элемент звезды не направлена внутрь звезды. Определить минимальный радиус звезды-красного гиганта $r_{\text{мин}}$, при котором начнется перетекание ее вещества. *Примечание: полученное для* $r_{\text{мин}}$ *уравнение можно решить приближенно: графически. Гравитационную* *постоянную принять равной* $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\text{Нм}^2}{\text{кг}^2}$, *массу Солнца* $M_{\odot} = 1{,}99 \times 10^{30}$кг.

Г). Выразить период обращения двойной звезды через массы компонент $M_{\text{БК}}, M_{\text{з}}$ и момент ипмульса L . Пусть в процессе аккреции масса белого карлика увеличилась на малую величину ΔM. Выразить соответствующее изменение периода ΔT через массы компонент, период T и ΔM. Для данных пункт В). расстояние между компонентами будет увеличиваться, или уменьшаться с течением времени? *Примечание: для малых x можно воспользоваться формулой* $(1+x)^n \approx 1 + nx$, где n – любое целое число.

Д). Используя значения параметров двойной звезды из пункта В)., найти период обращения двойной звезды в начальный момент времени, а также в момент времени, непосредственно предшествующий взрыву сверхновой (в годах). *Примечание: изменение массы белого карлика при этом можно считать малым.*

Решение (20 баллов)

А). На основании обобщенного третьего закона Кеплера запишем:

$$T = \frac{2\pi D^{3/2}}{\sqrt{G(M_{\text{БК}} + M_{\text{з}})}} \qquad (1)$$

(2 балла)

Б). Звезды движутся по окружностям вокруг общего центра масс. Их радиусы:

$$r_{\text{БК}} = \frac{M_{\text{з}}}{M_{\text{БК}} + M_{\text{з}}} D; \qquad (2)$$

$$r_{\text{з}} = \frac{M_{\text{БК}}}{M_{\text{БК}} + M_{\text{з}}} D. \qquad (3)$$

Используя (1), (2) и (3), кинетическую энергию можно записать как сумму кинетических энергий обеих звезд:

$$E_{\text{К}} = \frac{4\pi^2 M_{\text{БК}} r_{\text{БК}}{}^2}{2T^2} + \frac{4\pi^2 M_{\text{БК}} r_{\text{БК}}{}^2}{2T^2} = \frac{G M_{\text{БК}} M_{\text{з}}}{2D}. \qquad (4)$$

Так как мы пренебрегаем собственным вращением звезд, то момент импульса будет равен сумме моментов импульсов компонент:

$$L = M_{\text{БК}} \frac{4\pi^2 r_{\text{БК}}}{T} r_{\text{БК}} + M_{\text{з}} \frac{4\pi^2 r_{\text{з}}}{T} r_{\text{з}} = \frac{\sqrt{DG} M_{\text{БК}} M_{\text{з}}}{\sqrt{M_{\text{БК}} + M_{\text{з}}}}. \qquad (5)$$

Потенциальная энергия взаимодействия компонент не обязана сохраняться при аккреции, поэтому не будет сохраняться и кинетическая. Если мы предположим, что аккреция происходит симметричным образом относительно компонент, то момент импульса двойной звезды будет сохраняться.

(4 балла)

В). Для того, чтобы ближайший к белому карлику элемент красного гиганта начал свободно перетекать на белый карлик, необходимо равновесие трех сил, направленных вдоль одной прямой: гравитационного притяжения белого карлика, гравитационного притяжения красного гиганта и центробежной силы. Таким образом, получим:

$$\frac{GM_{\text{БК}}}{(D-r_{\text{мин}})^2}+\frac{4\pi^2}{T^2}(r_{\text{мин}}-r_{\text{з}})=\frac{GM_{\text{з}}}{{r_{\text{мин}}}^2}, \qquad (6)$$

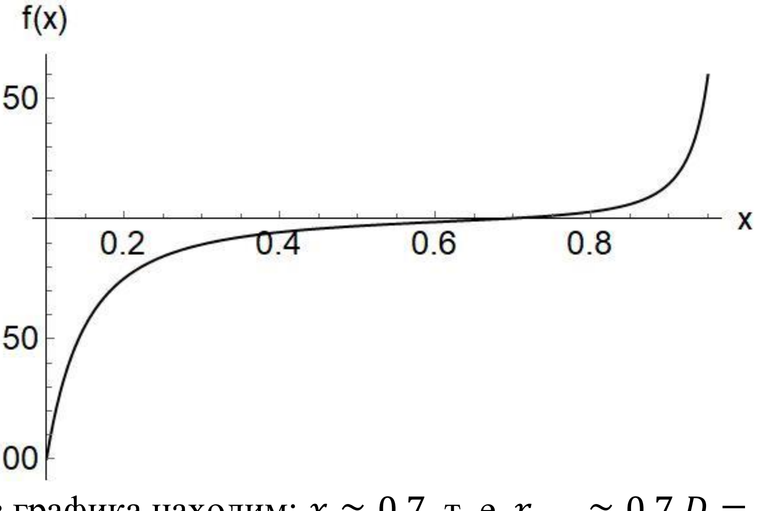
Подставим период T и радиус орбиты красного гиганта (1), (3):

$$\frac{M_{\text{БК}}}{(D-r_{\text{мин}})^2}-\frac{M_{\text{БК}}}{D^2}+\frac{(M_{\text{БК}}+M_{\text{з}})}{D^3}r_{\text{мин}}=\frac{M_{\text{з}}}{{r_{\text{мин}}}^2}, \qquad (7)$$

Для решения полученного уравнения (7) введем безразмерные величины $x={r_{\text{мин}}}/{D}$, q=${M_{\text{БК}}}/{M_{\text{з}}}$=0,15. Получим уравнение:

$$f(x)=x(q+1)-q-\frac{1}{x^2}+\frac{q}{(1-x)^2}=0. \qquad (8)$$

(8) сводится к уравнению 5-й степени, поэтому его корни не могут быть выражены через элементарные функции от q. График f(x) представ/лен на Рис.:



Из графика находим: $x\approx 0{,}7$, т. е. $r_{\text{мин}}\approx 0{,}7\,D=7{,}7\times 10^{10}$ м.

(6 баллов)

Г). Исключая D из соотношений (1) и (5), получим:

$$T=\frac{2\pi L^3(M_{\text{БК}}+M_{\text{з}})}{G^2{M_{\text{БК}}}^3{M_{\text{з}}}^3}. \qquad (9)$$

Сумма масс в процессе аккреции сохраняется, поэтому изменение периода есть:

$$\Delta T = \frac{2\pi L^3 (M_{\text{БК}} + M_{\text{з}})}{G^2 (M_{\text{БК}} + \Delta M)^3 (M_{\text{з}} - \Delta M)^3} - \frac{2\pi L^3 (M_{\text{БК}} + M_{\text{з}})}{G^2 {M_{\text{БК}}}^3 {M_{\text{з}}}^3} =$$
$$= \frac{2\pi L^3 (M_{\text{БК}} + M_{\text{з}})}{G^2 {M_{\text{БК}}}^3 {M_{\text{з}}}^3} \left(\frac{1}{(1 + \Delta M / M_{\text{БК}})^3 (1 - \Delta M / M_{\text{з}})^3} - 1 \right).$$

Используя формулу из примечания, получим:

$$\Delta T \approx \frac{3T(M_{\text{БК}} - M_{\text{з}})}{M_{\text{БК}} M_{\text{з}}} \Delta M. \quad (10)$$

Следовательно, период обращения будет уменьшаться. Но так как зависимость между периодом и расстоянием монотонная, то расстояние D будет тоже уменьшаться.

(4 балла)

Д). Для начального момента времени по формуле (1) находим: $T_0 = 0{,}21$ года.

В нашем случае $\Delta M = 0{,}2\ M_{\odot}$. По формуле (10) получаем $\Delta T = -0{,}09$ года. Таким образом, перед взрывом сверхновой $T = 0{,}12$ года.

(4 балла)