ВАРИАНТ 1

ЗАДАНИЕ 1

Два снаряда запущены горизонтально с поверхности Земли вдоль экватора в противоположных направлениях со скоростью 8,5 км/с относительно поверхности планеты.

а) Найдите отношение удельных кинетических энергий снарядов относительно центра Земли в момент запуска.

б) Вычислите, во сколько раз отличаются эксцентриситеты орбит снарядов.

в) Определите, на сколько процентов отличаются ускорения свободного падения в апогеях орбит снарядов.

г) Рассчитайте расстояние между точками на поверхности Земли, в которых окажутся снаряды через один оборот.

Примечание: масса Земли $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг, экваториальный радиус Земли $R = 6378$ км, сидерический период вращения Земли $P = 23$ ч 56 мин 04 с.

Решение

а) Скорости снарядов относительно центра Земли:

$$V_1 = V - V_0 = 8{,}035 \text{ км/с}, \qquad V_2 = V + V_0 = 8{,}965 \text{ км/с},$$

где $V_0 = 2\pi R/P = 0{,}465$ км/с.

Отношение удельных кинетических энергий снарядов:

$$\frac{\varepsilon_{\text{кин }2}}{\varepsilon_{\text{кин }1}} = \frac{E_{\text{кин }2}/m_2}{E_{\text{кин }1}/m_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = 1{,}245.$$

б) Определим большие полуоси орбит снарядов

$$V_1 = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a_1}\right)} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{GM}{\frac{2GM}{R} - V_1^2} = 6600{,}1 \text{ км},$$

$$V_2 = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a_2}\right)} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{GM}{\frac{2GM}{R} - V_2^2} = 8942{,}4 \text{ км}.$$

Отношение эксцентриситетов орбит снарядов:

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{1 - R/a_2}{1 - R/a_1} = 8{,}54.$$

в) Относительная разность ускорений свободного падения в апогеях орбит снарядов:

$$\frac{g_1 - g_2}{g_2} = \frac{1/Q_1^2 - 1/Q_2^2}{1/Q_2^2} = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 - 1 = \left(\frac{2a_2 - R}{2a_1 - R}\right)^2 - 1 = 1{,}845 \text{ или } 184{,}5\ \%$$

г) Периоды обращения снарядов по орбитам:

$$T_1 = \sqrt{\frac{4\pi^2 a_1^3}{GM}} = 1{,}483 \text{ ч}, \qquad T_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2 a_2^3}{GM}} = 2{,}338 \text{ ч},$$

Расстояние вдоль экватора между точками, в которых окажутся снаряды через один оборот по орбите:

$$L = \Delta\lambda \cdot R = \frac{2\pi}{P}\left(T_2 - T_1\right)R = 1433 \text{ км}.$$

ЗАДАНИЕ 2

Перигелийное расстояние некоторого астероида (вылетевшего скорее всего из пояса Койпера) составляет q = 5,3 а.е., а афелийное Q = 48,1 а.е.

а) Чему будет равна его скорость в перигелии и афелии, а также в момент времени, когда его радиус-вектор составит 70 % от большой оси орбиты?

б) Найдите площадь плоскости, ограниченной орбитой этого астероида.

в) Предположим, что астероид, находясь на расстоянии, равном большой полуоси своей орбиты, мгновенно потерял скорость относительно Солнца и стал падать по прямой на Солнце. Сколько времени продлится его падение?

г) Космический корабль, пролетая мимо астероида, спустил астероидоход (по аналогии с луноходом), который совершил мягкую посадку. Измерения показали, что астероид имеет шарообразную форму, его радиус составляет всего 1 км, а плотность его вещества ρ = 2 г/см^3. Сможет ли астероидоход объехать астероид за 2 часа?

д) Через какой промежуток времени повторяются противостояния этого астероида?

Решение.

а) Найдем большую полуось орбиты астероида и его эксцентриситет:

$$Q = a(1 + e)$$
$$q = a(1 - e)$$

Следует, что $a = (Q + q)/2$ = 26,7 а.е, $e = (Q - q)/2a$ = 0,8.

Скорость в афелии: $\upsilon_Q = (GM_\odot/a \times (1-e)/(1+e))^{0,5}$ = 1,93 км/с.

Скорость в перегелии: $\upsilon_q = (GM_\odot/a \times (1+e)/(1-e))^{0,5}$ = 17,34 км/с.

Скорость в точке орбиты: $\upsilon = (GM_\odot(2/\mathrm{r} - 1/a))^{0,5} = (GM_\odot(2/0{,}7a - 1/a))^{0,5}$= $=(GM_\odot/a \times (2/0{,}7-1))^{0,5}$= 7,88 км/с.

Ответ: υ_{Q} = 1,93 км/с, υ_{q} = 17,34 км/с, υ = 7,88 км/с.

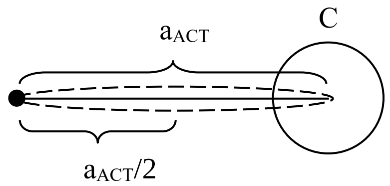
б) $S = \pi ab$, где S – площадь плоскости, ограниченной орбитой, a – большая и b – малая полуоси орбиты астероида.

$b = a\sqrt{1-e^2}$. С учетом формулы выше: $S = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$

Тогда площадь: $S = 1{,}34 \times 10^3$ (а.е.)^2

Ответ: $S = 1{,}34 \times 10^3$ (а.е.)^2

в)



Рисунок

Решаем в предположении, что астероид будет двигаться по очень вытянутой, с эксцентриситетом, близким к 1, орбите, большая полуось которой будет равна $a_{АСТ}/2$ (смотри рисунок). Тогда из третьего закона Кеплера $\frac{T_{АСТ}^2}{T_З^2} = \frac{(a_{АСТ}/2)^3}{a_З^3}$ следует что $T_{АСТ}$=48,8 лет. Тогда время пролета половины орбиты – от афелия до перигелия (время падения) будет равно половине $T_{АСТ}$, а время падения составит 24,4 лет.

Ответ: 24,4 лет.

г) Астероидоход должен двигаться со скоростью, меньшей 1-й космической, иначе он оторвется от поверхности астероида.

Тогда время объезда астероида $T = \frac{2\pi R}{v_1}$; $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$.

Плотность астероида $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$;

Получим *T= 2,3* часа. Таким образом, за 2 часа астероидоход не сможет объехать астероид.

Ответ: не сможет.

д) Противостояния этого астероида будут повторяться через синодический период, который определяется из синодического уравнения.

Определим сидерический период обращения астероида из третьего закона Кеплера $\frac{T_{АСТ}^2}{T_З^2} = \frac{(a_{АСТ})^3}{a_З^3}$. Получим $T_{АСТ}$= 138 лет.

$S = T_{\text{АСТ}}/(T_{\text{АСТ}} - 1) = 1{,}007$ лет.

Ответ: 1,007 лет.

ЗАДАНИЕ 3

Недавно открытый межзвездный астероид Alkuaykib-V/24 пролетел через внутреннюю часть солнечной системы по прямолинейной траектории, лежащей в плоскости эклиптики. Было установлено, что он имеет близкую к сферической форму со средним диаметром 220 км. В момент открытия астероида его эклиптическая долгота составила λ = 180°, тангенциальная скорость была равна 16 км/с и направлена в сторону уменьшения эклиптической долготы, а лучевая скорость была равна –275 км/с. В момент наибольшего сближения с Землей лучевая скорость астероида стала равной нулю, а астероид оказался в нижнем соединении на расстоянии 3 млн. км от Земли.

а) Определите день года, в который было совершено открытие данного астероида.

б) Найдите пространственную скорость астероида и расстояние (в а.е.), пройденное астероидом до момента наибольшего сближения с Землей.

в) Вычислите длительность транзита астероида по солнечному диску.

г) Оцените видимую звездную величину астероида в момент его открытия, приняв сферическое альбедо его поверхности в видимом диапазоне равным 0,43.

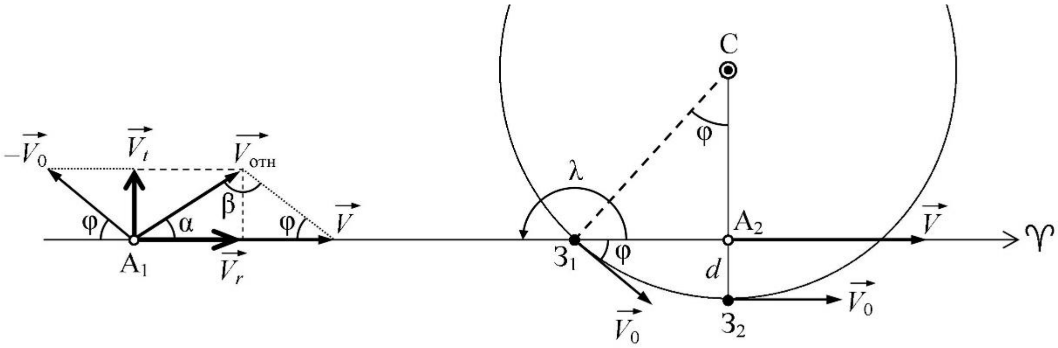
<u>Решение</u>

а) Найдём угол φ (см. рисунок):

$$\sin\varphi = V_t / V_0 \,,$$

откуда φ = 32,47°, где V_0 = 29,8 км/с – средняя орбитальная скорость Земли.

Нижнее соединение астероида произойдёт в день летнего солнцестояния 21.06. (см. рисунок). Момент обнаружения астероида произошел на $\Delta t = \varphi/\omega = 32{,}93$ суток раньше, т.е. примерно 19.05., где $\omega = 360°/365{,}25 = 0{,}986°/\text{сут}$ – средняя угловая скорость движения Земли.



б) Вектор относительной скорости астероида: $\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V}_r + \vec{V}_t$. Модуль вектора относительной скорости:

$$V_{\text{отн}} = \sqrt{V_r^2 + V_t^2} = 275,47 \text{ км/с}.$$

Вектор пространственной скорости астероида: $\vec{V} = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_0$. Модуль вектора пространственной скорости:

$$V = \sqrt{V_{\text{отн}}^2 + V_0^2 - 2V_{\text{отн}}V_0\cos\beta} = 300,14 \text{ км/с}.$$

Пройденное расстояние до максимального сближения:

$$L = V \cdot \Delta t = 5,71 \text{ а.е.}$$

в) Из соотношения $(V - V_0)\tau = \alpha d$, где α = 32′ – средний видимый угловой диаметр солнечного диска, находим продолжительность транзита τ = 1,72 мин.

г) Расстояние от Земли до астероида в момент его открытия составляет

$$x = L - \Delta x = L - a_0 \sin\varphi = 5,17 \text{ а.е.}$$

Расстояние от Солнца до астероида в момент его обнаружения равно $a = L/\cos\psi$, где $\text{tg}\psi = (a_0 - d)/L = 0,172$. Следовательно, a = 5,79 а.е.

Мощность отраженного от поверхности астероида солнечного излучения равна

$$P_{\text{отр}} = \frac{P_{\text{С}}}{4\pi a^2} \cdot \frac{\pi D^2}{4} A = 6,64 \cdot 10^{11} \text{ Вт},$$

где $P_{\text{С}} = 3,83 \cdot 10^{26}$ Вт – светимость Солнца, D = 220 км – диаметр астероида, A = 0,43 – сферическое альбедо поверхности астероида.

Освещенность, создаваемая отраженным от астероида излучением на поверхности Земли в момент обнаружения астероида:

$$E = \frac{P_{\text{отр}}}{4\pi x^2} = 8,83 \cdot 10^{-14} \text{ Вт/м}^2.$$

Видимая звездная величина астероида:

$$m = m_{\text{С}} - 2,5\lg\frac{E}{b_{\text{С}}} = 13,73^m,$$

где $b_{\text{С}} = 1360$ Вт/м^2 – солнечная постоянная, $m_{\text{С}} = -26,74^m$ – видимая звездная величина Солнца

ЗАДАНИЕ 4

При наблюдении транзита экзопланеты по диску звезды определено, что время транзита составляет 72 ч, период движения экзопланеты 4000 ч. Кроме того, из спектрального анализа света, проходящего через атмосферу планеты получено, что изменение лучевой скорости планеты с начала и до окончания транзита составляет 10 км/с. Предполагая, что орбита планеты является круговой и видна точно с ребра, определить:

а) Радиус орбиты планеты;

б) Массу звезды;

в) Радиус звезды.

Гравитационную постоянную считать равной $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2·кг$^{-2}$.

Решение:

Первое уравнение, связывающее необходимые нам параметры, получим, выразив период движения экзопланеты T :

$$T = 2\pi R / v\,.$$

Здесь R — радиус орбиты экзопланеты. Так как орбита представляет собой окружность, то скорость экзопланеты на орбите: $v = \sqrt{GM/R}$, где M — масса звезды, а G — гравитационная постоянная. Следовательно:

$$T = \frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{MG}}\,. \quad (1)$$

В начале транзита свет, регистрируемый наблюдателем, проходит вдоль прямой BD, в конце транзита — вдоль прямой CG (см. Рис. 1). В каждый из этих моментов времени скорость экзопланеты направлена вдоль касательных к орбите ED и GH соответственно.

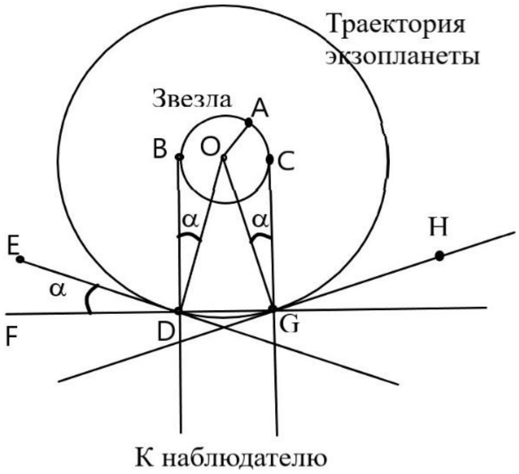


Рис1

Из рисунка находим, что в соответствующие моменты времени наблюдатель регистрирует лучевые скорости $v\,sin\alpha$ и $-v\,sin\alpha$. Так как угол α можно считать малым (это отношение радиуса звезды к радиусу орбиты планеты), то изменение лучевой скорости: $\Delta v = 2v\alpha$. С другой стороны, 2α есть дуга, проходимая экзопланетой за время транзита Δt. Следовательно:

$$\Delta v = v \times 2\pi \frac{\Delta t}{T} = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \sqrt{\frac{GM}{R}} . \qquad (2)$$

Решая полученную систему уравнений (1) - (2) относительно R и M, получим:

$$R = \frac{\Delta v\, T^2}{4\pi^2 \Delta t} = 2{,}03 \cdot 10^{11} \text{м};$$

$$M = \frac{\Delta v^3 T^4}{16\pi^4 G \Delta t^3} = 2{,}38 \cdot 10^{31} \text{ кг}.$$

Из Рис. 1 находим радиус звезды: $r = R\alpha = \frac{R\Delta v}{2v} = \frac{\pi R \Delta t}{T} = 1{,}15 \cdot 10^{10}$ м, что оправдывает приближение малого угла α.

Ответ: а) $2{,}03 \cdot 10^{11}$ м; б) $2{,}38 \cdot 10^{31}$ кг; в) $1{,}15 \cdot 10^{10}$ м.

ЗАДАНИЕ 5

Компоненты двойной звезды движутся по круговой орбите. Один из компонентов является видимым, а другой - темным. Вследствие этого, график интенсивности двойной звезды имеет два характерных минимума. Во время первого видимая звездная величина 5^m, во время второго 6^m. Минимальная видимая звездная величина за все время наблюдений $4{,}5^m$.

а) Считая, что компоненты двойной звезды имеет форму эллипсоидов вращения, вытянутых вследствие приливного воздействия, определить коэффициент эллиптичности (отношение малой полуоси к большой) яркого компонента;

б) Определить отношение малый полуосей эллипсоидов видимого и темного компонентов.

в) Зная, что абсолютная звездная величина видимого компонента составляет 2^m, оценить расстояние (в пк) до данной двойной звезды.

Указание: пренебречь эффектами, связанными с собственным вращением звезд. Площадь эллипса S определяется по формуле: $S = \pi ab$, где a и b — малая и большая полуоси эллипса соответственно.

Решение:

Будем считать, что поток излучения, регистрируемый астрономами, прямо пропорционален видимой площади излучаемого объекта. Таким образом, видимая звездная величина рассматриваемой двойной звезды будет минимальна в том случае, когда видна наибольшая часть видимого компонента, т. е. он расположен к нам «боком». Приливные силы всегда направлены вдоль линии, соединяющей оба компонента, поэтому эллипсоид будет вытянут именно вдоль этой линии. Таким образом, в моменты покрытий одним компонентом другого, к наблюдателю будет обращен малый круг эллипсоида. Видимая звездная величина будет максимальной, когда темный компонент закроет часть видимого, а промежуточный максимум будет наблюдаться, когда видимый компонент будет ближе к нам и наблюдаться будет малый круг эллипсоида вращения с радиусом a. Таким образом, получим:

$$5 - 4{,}5 = 0{,}5 = 2{,}5\,Log\left(\frac{\pi ab}{\pi a^2}\right);$$

$$\frac{a}{b} = 10^{-\frac{1}{5}} \approx 0{,}63\,.$$

Из соотношений для видимых звездных величин в момент затмения темным компонентом видимого и при покрытии видимым компонентом темного:

$$6 - 5 = 1 = 2{,}5\,Log\left(\frac{\pi a^2}{\pi a^2 - \pi r^2}\right) = 2{,}5\,Log\left(\frac{1}{1 - \frac{r^2}{a^2}}\right);$$

$$\frac{r}{a} = \sqrt{1 - 10^{-0{,}4}} \approx 0{,}78\,.$$

Здесь r — радиус темного компонента.

Для оценки расстояния можем выбрать значение видимой звездной величины 5^m. Тогда:

$$2 = 5 + 5 - 5\,Log\,r\,.$$

Получим: $r \approx 40$ пк.

Ответ: а) 0,63 ; б) 0,78 : в) 40 пк.