8.1. На доске записаны натуральные числа $7^2,\ 8^2,\ \ldots,\ 2023^2,\ 2024^2$. Можно ли к одному из них прибавить 7, к другому 8, … , к оставшемуся 2024 так, чтобы в результате все полученные суммы были простыми числами?

8.2. Пусть $\mathcal{S}$ – множество всех невозрастающих последовательностей $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{101}$ таких, что $a_i \in \{0, 1, \ldots, 101\}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 101$. Для каждой последовательности $s \in \mathcal{S}$ обозначим

$$f(s) = \left\lceil \frac{a_1}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{a_3}{2} \right\rceil + \ldots + \left\lfloor \frac{a_{100}}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{a_{101}}{2} \right\rceil,$$

где, как обычно, $\lfloor x \rfloor$ – это наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\lceil x \rceil$ – минимальное целое число, не меньшее x.

Докажите, что количества последовательностей $s \in \mathcal{S}$ таких, что $f(s)$ чётно, и таких, что $f(s)$ нечётно, одинаковы.

8.3. Существуют ли натуральные числа a и b, при которых произведение $\left(\sqrt{1+\frac{4}{a}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{4}{b}}-1\right)$ является рациональным числом?

8.4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ выполняются равенства $\angle ABC = \angle CDE = \angle EFA$, и биссектрисы углов ABC, CDE и EFA пересекаются в одной точке. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи BC и ED – в точке Q, лучи CD и FE – в точке R, а лучи DE и AF – в точке S.

Докажите, что $PR = QS$.