11.1. Пусть m и n – целые числа, бо́льшие 1. Произвольно выбраны $m+n$ различных натуральных чисел, не превосходящих $mn-1$.

Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два числа $x \neq y$, удовлетворяющие равенствам

$$\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{y}{n}\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{y}{m}\right],$$

где через $[t]$ обозначено наибольшее целое число, меньшее или равное t.

11.2. Даны 29 квадратных трёхчленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_{29}(x)$ и 15 действительных чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_{15}$. Докажите, что для некоторых двух данных многочленов $f_i(x)$ и $f_j(x)$ верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{14} \big(f_i(x_{k+1}) - f_i(x_k)\big) \cdot \big(f_j(x_{k+1}) - f_j(x_k)\big) > 0.$$

11.3. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, а I_A – центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Точка W – середина дуги BAC описанной окружности Ω треугольника ABC. Точка H – проекция точки I_A на прямую IW. Касательная, проведённая к описанной окружности треугольника BIC в точке I, пересекает Ω в точках E и F.

Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку AI касается описанной окружности треугольника EFH.

11.4. Множество $\mathcal{M}$, состоящее из натуральных чисел, обладает следующим свойством: если для каких-то (необязательно различных) натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ число $a_1 a_2 \ldots a_{2024}$ принадлежит $\mathcal{M}$, то и число $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2024}$ тоже принадлежит $\mathcal{M}$.

Докажите, что все натуральные числа, не меньшие 2049, принадлежат $\mathcal{M}$.