



Республиканская физическая олимпиада 2024 год (III этап)

Теоретический тур

Решения задач 11 класс (для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты.

Если окончательный результат не занесен в Лист ответов, но содержится в основном решении, то этот результат также необходимо оценивать.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

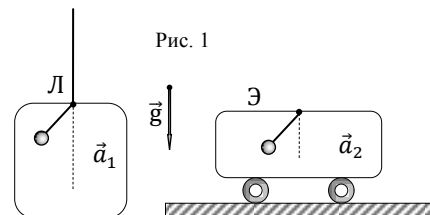


***Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших
талантливых школьников!***

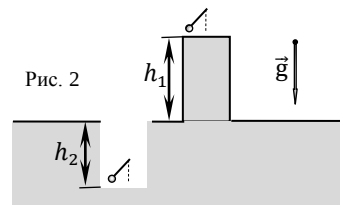
Задание 10-1. Гармоническая разминка

Справочные данные и параметры рассматриваемых систем: сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $\pi = 3,14$, при малых x ($x \rightarrow 0$) справедливы приближенные формулы: $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

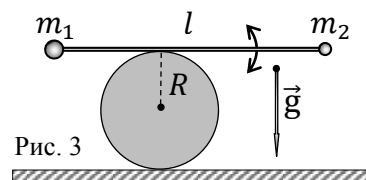
1.1 «Разгон маятника» Известно, что период колебаний математического маятника, подвешенного в лифте Л (Рис. 1), движущемся с ускорением $a_1 = 1,5 \text{ м/с}^2$, и в электричке Э, движущейся с некоторым ускорением a_2 , один и тот же. Куда едет лифт? Чему равно ускорение a_2 электрички?



1.2 «Маятник в шахте» Известно, что на горе высотой $h_1 = 1,0 \text{ км}$ маятниковые часы (Рис. 2) начинают отставать на промежуток времени $\tau = 14 \text{ с}$ в сутки. На какую глубину h_2 необходимо опустить эти часы в шахту (см. Рис. 2), чтобы они шли также, как и на горе?



1.3 «Непостоянная планка» Небольшие шарики массами m_1 и m_2 закреплены на концах лёгкой жесткой тонкой планки длиной l . Планка с шариками покоится на поверхности неподвижного шероховатого горизонтального цилиндра радиусом R (Рис. 3). В положении равновесия планка горизонтальна и перпендикулярна оси цилиндра (на Рис. 3 показан вид со стороны торца цилиндра). Планку, приподнимая один из шариков, поворачивают на малый угол, так, что она движется по цилиндру без проскальзывания, и отпускают. После этого в системе начинаются колебания, в процессе которых планка движется в плоскости рисунка по поверхности цилиндра также без проскальзывания. Найдите период T малых колебаний планки с шариками.



Решение:

Задание 1. Гармоническая разминка

1.1 «Разгон маятника» При равномерном движении лифта или электрички в любом направлении (вверх – вниз или вправо – влево) период колебаний математического маятника, подвешенного к потолку, не изменится, поскольку все инерциальные системы отсчета (ИСО) эквивалентны (принцип относительности Галилея). Период колебаний такого маятника будет равен периоду колебаний «неподвижного» маятника длиной l , вычисленному по формуле Гюйгенса

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения.

При ускоренном движении лифта или электрички период колебаний T маятника можно найти по «модернизированной» формуле Гюйгенса через т.н. «эффективное ускорение» g^*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g^*}}. \quad (2)$$

В случае электрички (её ускорение a_2 горизонтально, не важно, в какую сторону) эффективное ускорение находится по теореме Пифагора

$$g^* = \sqrt{a_2^2 + g^2} = \sqrt{a_2^2 + g^2} > g. \quad (3)$$

Как следует из (2) и (3), в ускоренно движущейся электричке (не важно, разгон или торможение) период колебаний математического маятника всегда меньше, чем покоящегося.

При ускорении лифта вверх эффективное ускорение

$$g^* = g + a_1 > g, \quad (4)$$

а при ускорении вниз

$$g^* = g - a_1 < g. \quad (5)$$

Из сравнения (3), (4) и (5) получаем, что равенство периодов колебаний математического маятника в электричке и лифте может наблюдаться только при ускорении лифта вверх, когда

$$\sqrt{a_2^2 + g^2} = g + a_1. \quad (6)$$

Из (6) находим

$$a_2 = \sqrt{a_1(a_1 + 2g)} = 5,6 \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по две значащие цифры, поскольку «худшее» из данных условия задачи содержит две значащие цифры (не путать с цифрами после запятой!).

Подчеркнем, что (4) задает направление ускорения лифта (вверх), а в задаче спрашивается: куда он едет? Но за это «отвечает» скорость лифта, а не его ускорение. Следовательно, ехать лифт при этом может «куда угодно»: как вверх (ускоряется), так и вниз (тормозится) – в обоих случаях ускорение будет направлено вверх. Таким образом, распространенный ответ «лифт едет вверх» является неполным, а строго говоря – неверным.

1.2 «Маятник в шахте» При подъёме в гору на малую высоту h (по сравнению с радиусом Земли) несколько уменьшается ускорение свободного падения g .

Действительно, из закона всемирного тяготения следует, что на поверхности Земли

$$g = G \frac{M}{R^2}, \quad (8)$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная, $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ и $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$ – соответственно, масса и радиус Земли.

Соответственно, период колебаний маятника часов по формуле Гюйгенса будет равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cdot R^2}{GM}} = 2\pi R \sqrt{\frac{l}{GM}}. \quad (9)$$

При подъёме на высоту h расстояние до центра Земли увеличивается, следовательно

$$g(h) = G \frac{M}{(R+h)^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2} g = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} g. \quad (10)$$

Как следует из (10), только при $h = (\sqrt{2} - 1)R = 0,41R$, т.е. на высоте $h = 2639 \text{ км}$ над поверхностью Земли (глубокий космос!) ускорение свободного падения уменьшается в 2 раза (на 50%).

Таким образом, высоту $h_1 = 1,0 \text{ км}$ уверенно и с большой точностью можно считать малой, т.е. гораздо меньше радиуса Земли. В задаче не требуется, но преобразуем (10) для малых высот h ($h \ll R$) с учетом математической подсказки из условия задачи

$$\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \approx 1 + (-2) \left(\frac{h}{R}\right) = 1 - \frac{2h}{R}, \quad (11)$$

тогда

$$g(h) \approx \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} g = \left(1 - \frac{2h}{R}\right) g. \quad (12)$$

С учетом (9) и (10), на высоте h над поверхностью земли период колебаний $T_1(h)$ математического маятника составит

$$T_1(h) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(h)}} = 2\pi \sqrt{\frac{l(R+h)^2}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cdot R^2}{GM}} \times \sqrt{\frac{(R+h)^2}{R^2}} = T_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right). \quad (13)$$

Поскольку у правильно идущих часов $T_0 = 1,00 \text{ с}$, то для случая часов на горе получим

$$T_1(h) = T_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right) = 1,000157 \text{ с}, \quad (14)$$

тогда за сутки ($24 \times 60 \times 60 = 86\,400$) они сделают меньше N_1 качаний

$$N_1 = \frac{24 \times 60 \times 60}{1,000157} = 86\,386. \quad (15)$$

Это и соответствует суточному отставанию на $\tau = 14 \text{ с}$, приведенному в условии.

При опускании в шахту на глубину h ускорение свободного падения также уменьшается, но по линейному закону

$$g(h) = \left(1 - \frac{h}{R}\right) g. \quad (16)$$

Этот эффект связан с тем, что внешние (по отношению к текущему положению тела) слои Земли «перестают» притягивать тела, уменьшая тем самым «эффективную», т.е. гравитирующую массу Земли. Учет притяжения внутренних слоёв Земли и приводит к зависимости (16).

Соответственно, период колебаний $T_2(h)$ маятника в шахте на глубине h будет равен

$$T_2(h) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(h)}} = T_0 \sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{h}{R}\right)}} = T_0 \left(1 - \frac{h}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx T_0 \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{h}{R}\right)\right) = T_0 \left(1 + \frac{h}{2R}\right). \quad (17)$$

Сравнивая (13) и (17), находим, что для одинакового замедления хода маятниковых часов на горе и в шахте необходимо выполнение условия равенства их периодов колебаний (время суточного отставания $\tau = 14$ с дано для справки, и для решения не потребовалось)

$$T_0 \left(1 + \frac{h_1}{R}\right) = T_0 \left(1 + \frac{h_2}{2R}\right) \Rightarrow h_2 = 2h_1. \quad (18)$$

Расчет даёт

$$h_2 = 2h_1 = 2,0 \text{ км}. \quad (19)$$

Как видим из (19), для «одинакового отставания» маятниковые часы необходимо опускать в шахту на бóльшую глубину (в два раза!), чем поднимать в гору. Оно и понятно, поскольку в шахте ускорение свободного падения (16) убывает с глубиной в два раза медленнее, чем на горе (12).

Можно сказать и иначе: при одинаковых h маятниковые часы в шахте отстают в два раза меньше, чем на горе, т.е. идут точнее. В этом смысле лучше «зарываться», чем «подниматься»! ☺

1.3 «Непостоянная планка» В положении равновесия системы моменты сил тяжести шариков (массой планки пренебрегаем, поскольку она лёгкая) относительно точки касания O планки и цилиндра должны быть равны (Рис. 01)

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2, \quad (20)$$

где l_1 и l_2 – плечи соответствующих сил тяжести. Можно сказать и иначе – центр масс системы при равновесии должен быть в точке O .

Кроме того, выполняется очевидное условие

$$l_1 + l_2 = l. \quad (21)$$

Из системы уравнений (20) и (21) находим

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \\ l_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим механическую систему в момент, когда планка с шариками отклонена от положения равновесия на малый угол α и касается цилиндра новой точкой A (Рис. 02).

Поскольку планка двигалась по цилиндру без проскальзывания, то длина отрезка AO (O – прежняя точка касания) равна длине дуги AB (B – верхняя точка цилиндра)

$$AO = \widehat{AB} = \alpha R. \quad (23)$$

Подчеркнем, что точки O и B не лежат на одной вертикали, хотя для решения это не важно.

При отклонении планки от положения равновесия точка A опустилась (Рис. 03) на некоторую высоту h_1 относительно верхней точки цилиндра.

Из Рис. 3 с учетом малости угла α и подсказки из условия находим

$$h_1 = BC = R(1 - \cos \alpha) \approx \frac{\alpha^2}{2} R. \quad (24)$$

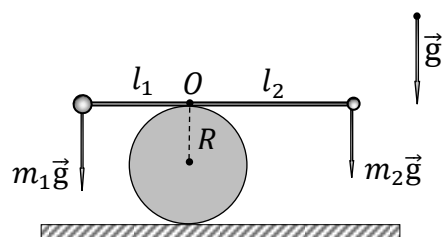


Рис. 01

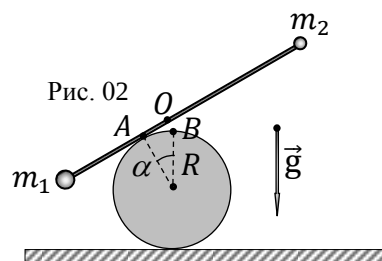


Рис. 02

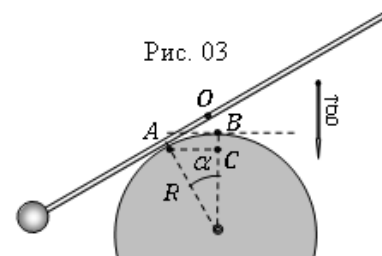


Рис. 03

Соответственно, при отклонении планки центр масс O системы поднялся относительно начального уровня (с учетом малости угла α и подсказки из условия) на высоту h_2

$$h_2 = AO \sin \alpha - h_1 = \{AO \sin \alpha \approx \alpha R \cdot \alpha\} = \alpha R^2 - \frac{\alpha^2}{2} R = \frac{\alpha^2}{2} R. \quad (25)$$

Следовательно, потенциальная энергия $E^п$ системы при отклонении планки с шариками на малый угол α увеличилась на величину

$$E^п = (m_1 + m_2)g \cdot h_2 = (m_1 + m_2)gR \cdot \frac{\alpha^2}{2}. \quad (26)$$

Заметим, что (26) можно получить и другим способом: рассматривая смещение по вертикали каждого шарика. Придётся немного больше «попотеть» с преобразованиями, но результат, конечно же, получится таким же.

Кинетическая энергия системы в рассматриваемый момент складывается из кинетических энергий шариков (планка легкая)

$$E^к = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (27)$$

Однако, из-за смещения точки касания цилиндра планкой (из $(\cdot) O$ в $(\cdot) A$) изменятся расстояния до мгновенной оси вращения, следовательно, линейные скорости мгновенного вращения шариков станут равными

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega(l_1 - \alpha R) \\ v_2 &= \omega(l_2 + \alpha R) \end{aligned} \quad (28)$$

где ω – мгновенная угловая скорость вращения планки.

Подставляя (28) в (27), с учетом (20), получим

$$E^к = \frac{\omega^2}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2\alpha R(m_2 l_2 - m_1 l_1) + (m_1 + m_2)\alpha^2 R^2) = \frac{\omega^2}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + (m_1 + m_2)\alpha^2 R^2). \quad (29)$$

При малых α вторым слагаемым в (29) можно пренебречь (оно второго порядка малости, поскольку α в квадрате!), тогда кинетическая энергия системы принимает «красивый» вид

$$E^к = \frac{\omega^2}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2). \quad (30)$$

Запишем закон сохранения энергии для данной колебательной системы

$$E^п + E^к = (m_1 + m_2)gR \cdot \frac{\alpha^2}{2} + (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \cdot \frac{\omega^2}{2} = \text{const}. \quad (31)$$

Далее для получения классического уравнения гармонических колебаний

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega^2 \cdot \alpha(t) = 0 \quad (32)$$

можно найти производную от (31) по времени и традиционным способом найти период колебаний системы.

Однако проще и короче провести энергетическую аналогию с пружинным маятником, для которого

$$E^п + E^к = k \cdot \frac{x^2}{2} + m \frac{v^2}{2} = \text{const}, \quad (33)$$

и период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (34)$$

Сравнивая (31) и (33), находим, что для планки с грузами роль массы m играет величина $m \rightarrow (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)$, называемая *моментом инерции* системы. Роль коэффициента упругости k пружины играет величина $k \rightarrow ((m_1 + m_2)gR)$.

Таким образом, искомый период T малых колебаний «непостоянной планки» равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{(m_1 + m_2)gR}} = 2\pi \frac{l}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{gR}}. \quad (35)$$

Задание 11-2. Миг невесомости

Рассмотрим механическую систему, образованную из тонкого гладкого проволочного кольца массой M , стоящего на горизонтальной плоскости (Рис. 1), и двух небольших одинаковых бусинок массой m каждая, насаженных на него. Бусинки могут скользить по кольцу без трения.

В начальный момент времени бусинки находятся вблизи верхней точки кольца (см. Рис. 1), а затем их одновременно отпускают без начальной скорости. Далее бусинки симметрично скользят по кольцу без трения, не опрокидывая его, разъезжаются, удаляясь друг от друга, и одновременно съезжаются в нижней точке кольца.

Будем характеризовать положение каждой бусинки на кольце углом α , образуемым текущим радиусом кольца с вертикалью (Рис. 2). Угол α измеряется в радианах (рад) и при скольжении каждой бусинки изменяется в пределах $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Динамометр G , вмонтированный в горизонтальную плоскость под кольцом (см. Рис. 2), измеряет зависимость веса $P(\alpha)$ всей механической системы от угла α при скольжении бусинок по кольцу.

Сопротивлением воздуха при движении бусинок пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Часть 1. Общая теория

В первой части задачи Вам необходимо вывести формулы для расчёта различных физических параметров системы (силы реакции $\vec{N}$ кольца (Рис. 3), её вертикальной проекции N_y , и т.д.) от угла α .

1.1 Получите зависимость модуля силы реакции кольца $N(\alpha) = |\vec{N}(\alpha)|$, действующей на бусинку, от угла α .

1.2 Найдите угол α_1 при котором сила реакции кольца $N(\alpha)$, становится равной нулю, т.е. бусинка не давит на кольцо.

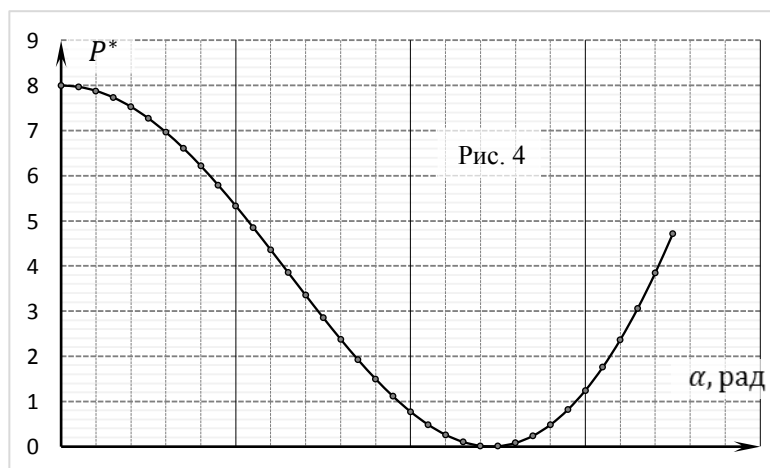
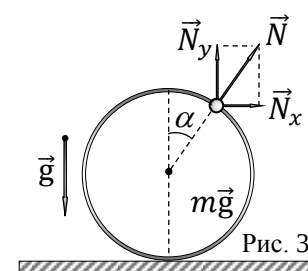
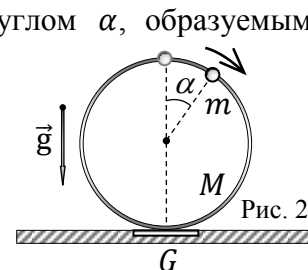
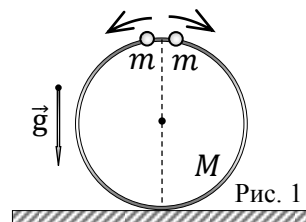
1.3 Разложите силу реакции $\vec{N}$ кольца на вертикальный и горизонтальный компоненты вдоль стандартных (декартовых осей) $\vec{N} = \vec{N}_y + \vec{N}_x$. Найдите зависимость вертикальной проекции $N_y(\alpha)$ силы реакции кольца от угла α .

1.4 Введём понятие приведенной вертикальной проекции N_y^* силы реакции кольца, как функции $N_y^*(\alpha) = N_y(\alpha)/mg$. На выданном бланке постройте график зависимости $N_y^*(\alpha)$ в интервале $0 \leq \alpha \leq \pi$ с шагом по углу $h = 0,05 \text{ рад}$.

1.5 Выделите характерные этапы и точки построенного графика $N_y^*(\alpha)$ и кратко их прокомментируйте с физической точки зрения.

Часть 2. Работа с графиком

Во второй части задачи Вам предстоит самое сложное – применить формулы, выведенные в первой части



Теоретический тур. Вариант 1.

11 класс. Решения задач. Бланк для жюри.

задачи, для «расшифровки» графика, полученного с использованием встроенного динамометра G (см. Рис. 2) при движении бусинок.

На графике (Рис. 4) представлена зависимость приведенного веса $P^*(\alpha) = P(\alpha)/m_0g$ всей механической системы от угла α в некотором диапазоне, где постоянная $m_0 = 10$ г. При этом шкала делений по оси абсцисс отсутствует.

2.1 Используя данные графика (см. Рис. 4), найдите массы бусинки m и кольца M .

2.2 Вычислите максимальный вес P_{max} системы в процессе движения бусинок. При каком значении угла α_2 он достигается?

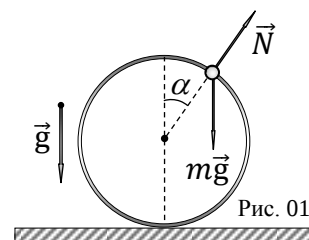
2.3 Восстановите численные значения по оси абсцисс.

Решение:

Часть 1. Общая теория

1.1 Рассмотрим движение одной из бусинок (например, правой), поскольку движение второй бусинки будет происходить совершенно симметрично. Понятно, что в силу симметрии, центр кольца при этом будет оставаться неподвижным, поскольку горизонтальные силы в любой момент времени будут скомпенсированы.

Пусть бусинка B оказалась в положении (Рис. 01), когда радиус R кольца составляет угол α с вертикалью.



Поскольку на бусинку B действуют две силы (тяжести и реакции кольца), то уравнение второго закона Ньютона примет вид (см. Рис. 13)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \quad (1)$$

Соответственно, в проекции на направление к центру окружности выражение (1) принимает вид

$$ma_{\text{цс}} = m \frac{v^2}{R} = mg \cos \alpha - N, \quad (2)$$

где $a_{\text{цс}}$ – центростремительное ускорение бусинки, которое иногда называют также нормальным ускорением a_n .

Из закона сохранения энергии следует, что в этот момент времени кинетическая энергия бусинки равна

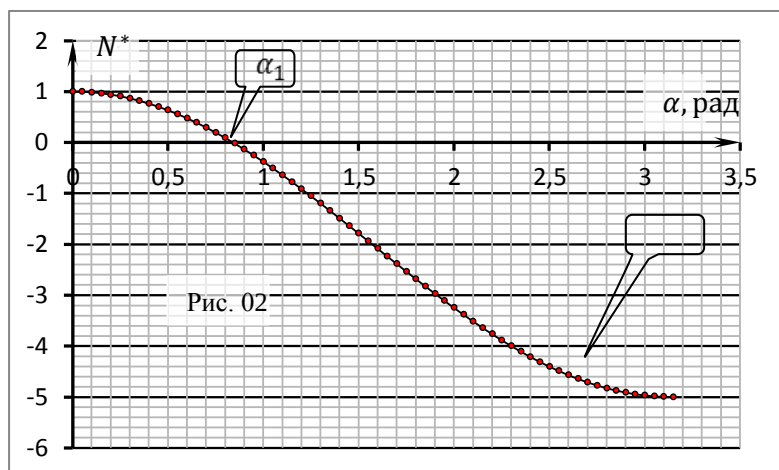
$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha) \Rightarrow \frac{v^2}{R} = 2g(1 - \cos \alpha). \quad (3)$$

Выражая из (2) силу реакции опоры, с учетом (3) получаем

$$N(\alpha) = mg \cos \alpha - m \frac{v^2}{R} = mg(3 \cos \alpha - 2). \quad (4)$$

Строить график зависимости (4) от школьников не требуется, но мы не откажем себе в этом удовольствии. В приведенных (безразмерных) координатах для силы $N^* = (N(\alpha)/mg)$, он представлен на Рис. 02.

Из графика следует, что при скольжении бусинки по кольцу сила реакции $N(\alpha)$ монотонно убывает от начального значения mg , проходит через нуль (по углу (см. Рис. 02) где-то в районе $\alpha_1 \approx 0,83$ рад) и далее становится отрицательной, достигая минимального значения $(-5mg)$.



Знак минус в данном случае «кричит» о том, что тело уже не давит на поверхность, а пытается её приподнять! Если бы таким образом скользила шайба по сфере, а не бусинка по кольцу, то в точке α_1 шайба оторвалась бы от сферической поверхности и далее полетела бы по параболе.

1.2 Итак, согласно (4) модуль силы реакции опоры $N(\alpha)$ уменьшается по мере скольжения бусинки по кольцу, и становится равен нулю при угле α_1

$$\cos \alpha_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_1 = 48,1^\circ = 0,839 \text{ рад} . \quad (5)$$

Как следует из (5), мы достаточно точно оценили угол α_1 графически в предыдущем пункте задачи (погрешность порядка $\sim 1\%$) «на глаз»! Это значит, что глаз – отличный оптический смарт-прибор, которым можно и нужно пользоваться при первой возможности! ☺

Как мы отметили ранее, при дальнейшем движении бусинки ($\alpha > \alpha_1$), сила реакции меняет знак (становится отрицательной!), а это означает, что далее она будет направлена к центру (!) окружности, а не от центра, как это было до сих пор.

С «точки зрения» третьего закона Ньютона, это означает следующее: если ранее бусинка прижимала кольцо к опоре, то теперь начнёт его приподнимать, пытаясь «оторвать» систему от горизонтальной плоскости опоры.

Иными словами, при скольжении бусинки на участке ($\alpha_1 < \alpha < \pi/2$), будет возникать подъёмная сила, действующая на кольцо.

1.3 Разложим силу реакции $\vec{N}$ кольца на компоненты по стандартным (декартовым) осям координат (см. Рис. 01)

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{N}_y + \vec{N}_x \\ N_y(\alpha) &= N(\alpha) \cos \alpha . \\ N_x(\alpha) &= N(\alpha) \sin \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

Соответственно, вертикальная проекция силы реакции со стороны обруча на бусинку будет равна

$$N_y(\alpha) = N(\alpha) \cos \alpha = mg(3\cos \alpha - 2) \cdot \cos \alpha . \quad (7)$$

1.4 Для приведенной вертикальной проекции $N_y^*(\alpha) = N_y(\alpha)/mg$ получаем выражение

$$N_y^*(\alpha) = \frac{N_y(\alpha)}{mg} = (3\cos \alpha - 2) \cdot \cos \alpha . \quad (8)$$

Построим график полученной зависимости $N_y^*(\alpha)$ на интервале $0 \leq \alpha \leq \pi$ с шагом по углу $h = 0,05$ рад.

Для этого потребуются более 60 вычислений (о, ужас!!!) на инженерном калькуляторе, которым, заметим, официально разрешено пользоваться! Ведь настоящие «олимпиадные волки» не боятся трудностей...

По итогу, заполнив соответствующую таблицу вычислений (без таблицы график не засчитывается!), по точкам на выданном бланке построим достаточно «красивую» кривую, приведенную на Рис. 13.

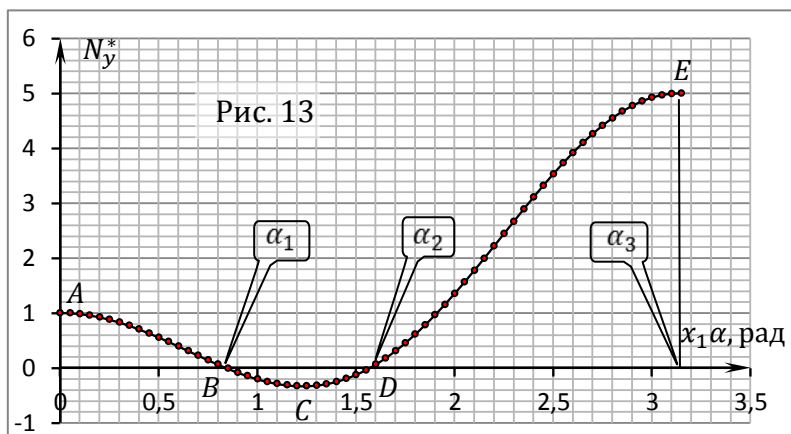


Рис. 13

1.5 Характерные этапы и точки построенного графика включают в себя участки положительных и отрицательных значений функции, промежутки её возрастания и убывания,

точки пересечения с осями абсцисс и ординат, точки экстремумов (минимумов и максимумов) функции, точки перегиба и т.д.

В данном пункте задачи достаточно заметить, что на участке AB (см. Рис. 13) функция $N_y^*(\alpha)$ убывает до нуля в точке $\alpha_1 = 48,1^\circ = 0,839$ рад, что, согласно (4), соответствует точке «зануления» силы реакции опоры.

На участке BD (см. Рис. 13) функция $N_y^*(\alpha)$ становится отрицательной, т.е. именно здесь возникает «подъёмная сила» со стороны движущихся бусинок.

В некоторой точке C имеется минимум (максимальная подъёмная сила!), далее в точке $\alpha_2 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} = 1,57$ рад (см. Рис. 13) функция $N_y^*(\alpha)$ вновь «зануляется» (сила реакции $\vec{N}$ в этот момент горизонтальна!).

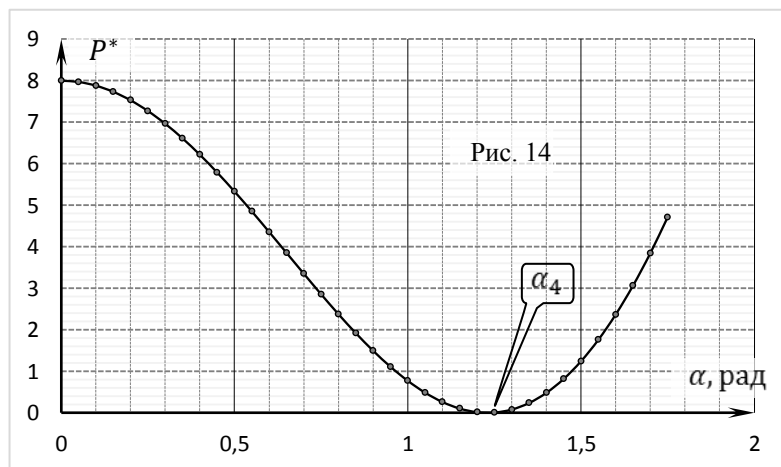
После этого функция $N_y^*(\alpha)$ возрастает от нуля до максимального значения (+5) в точке $\alpha_3 = 180^\circ = \pi = 3,14$ рад (см. Рис. 13), что соответствует сближению бусинок в нижней точке кольца.

Часть 2. Работа с графиком

2.1 Как следует из графика, представленного в условии задачи, в точке минимума A функция приведенного веса системы $P^*(\alpha) = P(\alpha)/m_0g$ (Рис. 14) касается оси абсцисс. Отсюда делаем вывод, что при данных значениях масс бусинки m и кольца M вес всей механической системы в этой точке графика также равен нулю

$$P(\alpha) = 0. \quad (9)$$

Иными словами, наблюдается «кратковременная невесомость», т.е. в этой точке графика «исчезает» сила давления системы на плоскость.



Как следует из решения пункта 1.5, это возможно, если сила тяжести кольца будет уравновешена двумя подъёмными силами бусинок, скользящих на участке BD (см. Рис. 13) графика.

Запишем выражение для веса механической системы с учётом (4) и (7) для двух бусинок и кольца

$$P(\alpha) = Mg + 2N_y(\alpha) = g(M + 2m(3 \cos \alpha - 2) \cdot \cos \alpha). \quad (10)$$

Минимум функции (10) определяется минимумом функции (8), поскольку остальные величины в (10) есть константы.

Поскольку функция (10) относительно $\cos \alpha$ есть парабола, ветви которой направлены вверх, а её корни 0 и $2/3$, то её минимум данной функции достигается в точке

$$\cos \alpha_4 = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha_4 = 70,5^\circ = 1,23 \text{ рад}, \quad (11)$$

и равен

$$(3 \cos \alpha_4 - 2) \cdot \cos \alpha_4 = -\frac{1}{3}. \quad (12)$$

Соответственно, для минимального веса всей механической системы имеем

$$P_{\min}(\alpha) = Mg + 2N_y(\alpha_3) = g \left(M + 2m \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \right) \cdot \frac{1}{3} \right) = g \left(M - m \frac{2}{3} \right). \quad (13)$$

Следовательно, для возникновения «точки невесомости» на графике $P^*(\alpha)$ необходимо выполнение следующего соотношения между массами одной бусинки m и кольца M

$$m = \frac{3}{2}M. \quad (14)$$

Используя график из условия находим, что в начальный момент времени вес системы равен $8m_0g$, следовательно

$$8m_0g = (M + 2m)g \Rightarrow M + 2m = 8m_0. \quad (15)$$

Решая систему (14) – (15), получим

$$\begin{aligned} m &= 3m_0 = 30 \text{ г} \\ M &= 2m_0 = 20 \text{ г} \end{aligned} \quad (16)$$

Для любителей дифференцирования заметим, что минимум (11) для угла α_4 можно найти, взяв производную от (10) по углу – результат, конечно же, получается аналогичным ☺.

2.2 Как следует из (10), максимальный вес системы достигается при $\alpha = \alpha_5 = \pi = 3,14$, в момент сближения бусинок в нижней части кольца. Следовательно, используя (9), находим

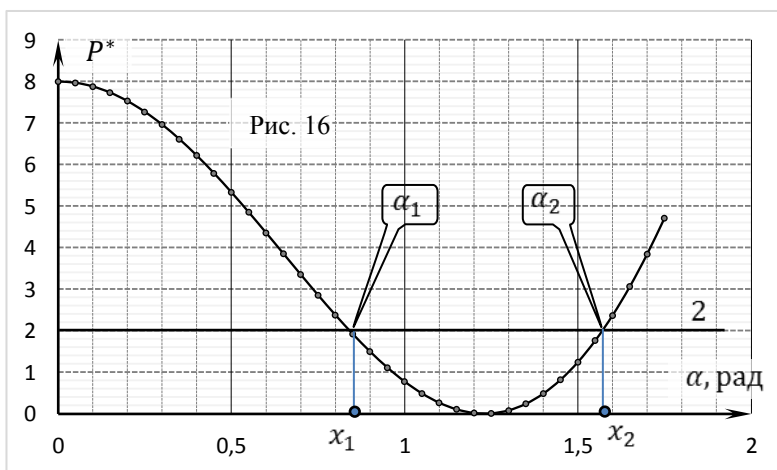
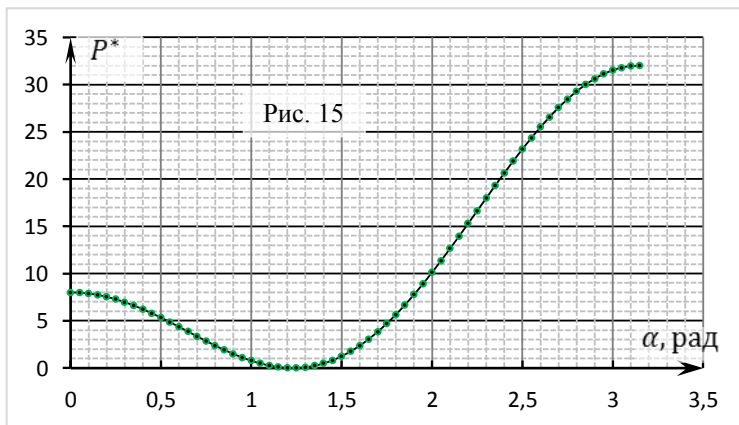
$$P_{\max} = P(\alpha = \pi) = g(M + 2m(3 \cdot (-1) - 2) \cdot (-1)) = 32m_0g. \quad (15)$$

График зависимости приведенного веса $P^*(\alpha) = P(\alpha)/m_0g$ на всем промежутке изменения угла α представлен на Рис. 15 (от школьников не требуется).

2.3 Для восстановления оцифровки оси абсцисс (углов) достаточно задать её начало отсчета и масштабный (мерный) отрезок, определяющий «расстояние» (т.е. угол) между основными делениями сетки вдоль данной оси.

С началом отсчета все понятно, поскольку вес системы в начальный момент равен $8m_0g$. Следовательно, начало отсчета оси абсцисс и оси ординат совпадают – нуль по одной оси соответствует нулю по второй оси.

Для определения масштабного отрезка необходимо точно установить абсциссы ($x_1; x_2$) двух любых точек на данной оси. Действительно, далее, используя, например, линейку и циркуль, можно проградировать все шкалу подобными отрезками (или их частями).



Для этой цели удобно выбрать точку α_1 (или α_2) нулевого веса бусинок (см. Рис. 13), поскольку в этот момент динамометр G зафиксирует вес системы, как вес кольца, т.е. равным $Mg = 2m_0g$. Заметим, что удобнее даже брать точку α_2 , т.к. при этом мы сразу находим «популярную» точку $\frac{\pi}{2}$ на оси абсцисс (углов). В качестве второй «реперной» точки опять же можно всегда выбрать точку начала координат.

Проведем горизонтальную прямую $Mg/m_0g = 2$ до пересечения с графиком (Рис. 15) и найдем соответствующие углы. Итак, у нас для восстановления шкалы выбраны точки

$$x_1 = \alpha_1 = 0,839 \text{ рад}; \quad x_2 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ рад}; \quad x_3 = \alpha_3 = 0,00 \text{ рад}. \quad (00)$$

Заметим, что в рамках выбранной модели оцифровки оси абсцисс, верной следует считать подобную процедуру с любой из двух характерных точек на Рис. 16. ☺

Задание 11-3. Прогрессивная электростатика

В современной физике широко распространены различные векторные методы решения прикладных задач. Наглядность и простота векторной алгебры, векторных диаграмм позволяют эффективно и эффективно справляться с задачами различной степени сложности.

В качестве примера рассмотрим электростатическую систему из n одинаковых маленьких положительно заряженных шариков, расположенных в вакууме в вершинах правильного n – угольника (Рис. 1).

Расстояние от центра O правильного многоугольника до любой из его вершин равно R .

Угол α между соседними радиусами, проведенными из точки O к любым соседним вершинам правильного n – угольника, обозначим через α (см. Рис. 1).

Величины электрических зарядов (q_i) шариков занумеруем по часовой стрелке в том же порядке, что и шарики ($q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n$) (см. Рис. 1).

Далее будем рассматривать различные варианты прогрессий, которые образуют электрические заряды (q_i) шариков и напряженности $\vec{E}_i$ электростатических полей, создаваемых ими в центре O правильного многоугольника.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $R = 1,52$ м, $q_0 = 151$ нКл, $\pi = 3,14$.

Часть 1. Арифметическая электростатика

1.1 Пусть в вершинах правильного n – угольника находятся одинаковые заряды q_0 , т.е. все $q_i = q_0$. Методом «мысленного поворота» найдите напряженность $\vec{E}_1$ электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре O правильного многоугольника.

1.2 Пусть теперь электрические заряды шариков ($q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n$) образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = q_1 = q_0$ и разностью $d = q_0$ (Рис. 2). Получите формулу для напряженности $\vec{E}_2$ электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре O правильного многоугольника.

1.3 Вычислите $\vec{E}_2$ для правильного многоугольника, у которого вектор $\vec{E}_2$ «нацелен» на третью вершину, в которой находится заряд $3q_0$.

Часть 2. Геометрическая электростатика

В этой части задачи величины электрических зарядов ($q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n$) шариков в вершинах правильного n – угольника образуют геометрическую прогрессию (Рис. 3) с первым членом $b_1 = q_1 = q_0$ и знаменателем $q = 2$.

2.4 Найдите напряженность $\vec{E}_0$ электростатического поля, создаваемого первым (наименьшим) зарядом $q_1 = q_0$ в центре O правильного многоугольника.

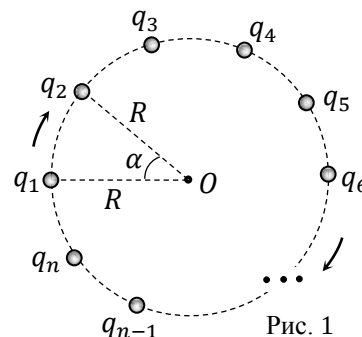


Рис. 1

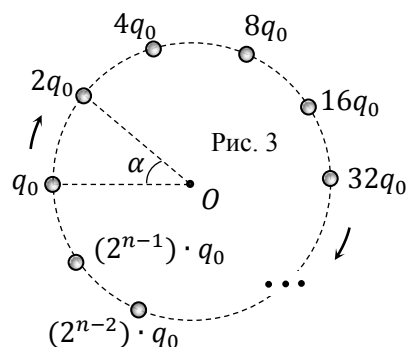
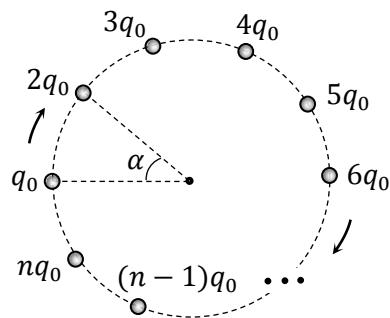


Рис. 3

2.5 Выведите формулу для напряженности $\vec{E}_3$ электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре O правильного многоугольника.

2.6 Вычислите $\vec{E}_3$ для правильного многоугольника, у которого вектор $\vec{E}_3$ перпендикулярен вектору $\vec{E}_0$.

Возможное решение:

Часть 1. Арифметическая электростатика

1.1 Суть метода «мысленного поворота» фактически полностью «изложена» в его названии: рассмотрим поворот всей системы одинаковых зарядов «как целого» (Рис. 01) в любом направлении (например, по часовой стрелке) на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ (или кратный ему).

Поскольку электростатическое поле является центральным, то вектор напряженности точечного заряда всегда направлен вдоль прямой, проходящей через данный заряд.

Это значит, что искомый вектор напряженности $\vec{E}_1$ системы тоже «жёстко связан» с рассматриваемой системой зарядов. Следовательно, при повороте системы зарядов он также повернётся в плоскости рисунка на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Таким образом, при подобном «мысленном повороте» вектор напряженности поля поменяет свое направление, т.е. вектор $\vec{E}_1$ изменится.

Но с другой стороны, в силу симметрии данной системы зарядов, при таком повороте каждый заряд «перейдет» в соседний, т.е. с точки зрения «стороннего наблюдателя» в системе ничего не изменится (!), поскольку все заряды одинаковые. Следовательно, вектор $\vec{E}_1$ при таком повороте не изменится!

Мы пришли к логическому противоречию, следовательно, что-то предположили неверно. На самом деле данное противоречие возникло лишь потому, что обычно у вектора есть длина, и «по умолчанию» мы считали его ненулевым, т.е.

$$\vec{E}_1 \neq \vec{0}. \quad (1)$$

«Разрешить» полученное противоречие можно только предположив обратное, что

$$\vec{E}_1 = \vec{0}. \quad (2)$$

Иными словами, можно считать, что нулевой вектор направлен «куда угодно», поскольку его модуль равен нулю. Говоря более строго, с нулевым вектором не связывают никакого направления в пространстве, т.е. он сонаправлен (и перпендикулярен!) любому ненулевому вектору.

Таким образом, при одинаковых зарядах в вершинах произвольного правильного многоугольника напряженность $\vec{E}_1$ электростатического поля в его центре O равна нулю.

Заметим, что и другие методы (например, суммирование векторов по правилу многоугольника) приводят к такому же результату (2), но именно метод «мысленного поворота» содержит *неявную подсказку* нашим юным олимпиадникам для выполнения следующего пункта задачи.

1.2 Поскольку шарики маленькие, то будем считать заряды (q_i) точечными. Как следует из закона Кулона, напряженность электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q_i в точке пространства с радиус-вектором $\vec{r}_i$

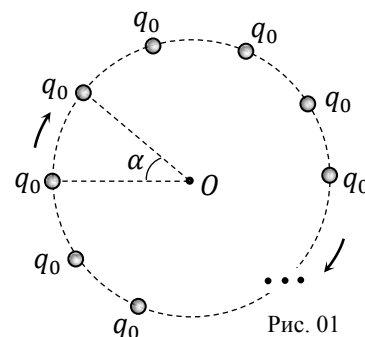


Рис. 01

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}. \quad (3)$$

Согласно (3), поле пропорционально заряду, т.е. больший заряд даёт больший вклад в результирующее (суммарное) поле. Это значит, что вклад последних (бóльших) зарядов арифметической прогрессии в общее поле будет наиболее значительным.

Для нахождения напряженности $\vec{E}_2$ электростатического поля, создаваемого системой точечных зарядов в центре многоугольника, по принципу суперпозиции полей необходимо просуммировать напряженности полей от каждого из зарядов системы

$$\vec{E}_2 = \sum_i \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_{n-1} + \vec{E}_n, \quad (4)$$

где индекс суммирования i меняется «по всем зарядам» арифметической прогрессии от единицы до n .

В отличие от предыдущего пункта задачи сумма (4) уже не будет равна нулю ($\vec{E}_2 \neq \vec{0}$), поскольку теперь векторы $\vec{E}_i$ будут иметь «различную длину» из-за возрастания зарядов в вершинах многоугольника.

Иными словами искомый вектор $\vec{E}_2$ (Рис. 02) обязательно будет иметь и модуль E_2 , и некоторое направление в плоскости рисунка, которое можно задать, например, углом β , образуемым данным вектором с «нижним» радиусом.

Как известно, при арифметической прогрессии каждый следующий член больше предыдущего на одну и ту же величину, соответственно, разность между ними остается постоянной. Это соображение и положим в основу модернизированного «метода поворота» для вычисления $\vec{E}_2$.

Вынесем вектор $\vec{E}_2$ на отдельную векторную диаграмму (Рис. 03). Мысленно повернем систему зарядов на угол α по часовой стрелке вокруг точки O – при этом вектор $\vec{E}_2$ на диаграмме также повернется на угол α в том же направлении и перейдет в положение $\vec{E}_2^*$, отмеченное пунктиром (см. Рис. 03).

Если же теперь поменять знаки всех зарядов (сделать их отрицательными), то вектор $\vec{E}_2^*$, согласно (3), также поменяет свое направление на противоположное (повернется на угол 180° и перейдет в положение $\vec{E}_2^{**}$ на векторной диаграмме (см. Рис. 03)). Понятно, что при таких преобразованиях модули векторов $\vec{E}_2^*$ и $\vec{E}_2^{**}$ останутся равными модулю искомого вектора $\vec{E}_2$

$$E_2 = E_2^* = E_2^{**}. \quad (5)$$

Далее наложим систему «повернутых и изменённых» зарядов на исходную систему зарядов. Тогда в центре O многоугольника, согласно принципу суперпозиции полей, суммарная напряженность $\vec{E}_s$ электростатического поля (см. Рис. 03) будет равна сумме двух векторов

$$\vec{E}_s = \vec{E}_2 + \vec{E}_2^{**}. \quad (6)$$

Однако, с другой стороны (Рис. 04), при такой процедуре во всех точках (за исключением первой!) по

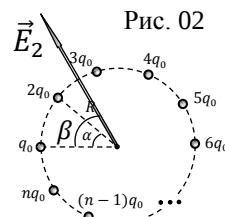


Рис. 02

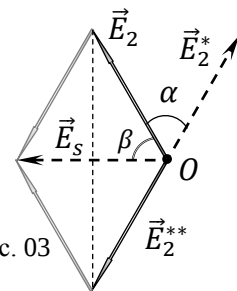


Рис. 03

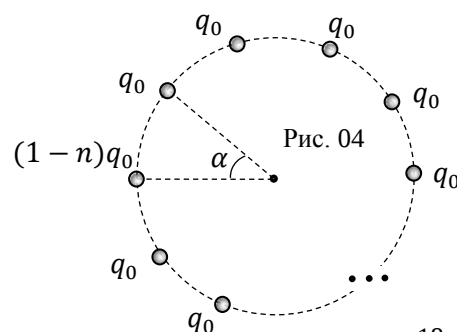


Рис. 04

правилам арифметической прогрессии останется только «по одному» заряду q_0 .

В первой же точке системы окажется суммарный заряд $(1 - n)q_0$, который является «совокупностью» зарядов q_0 (старого) и $(-nq_0)$, «пришедшего» в эту точку при повороте.

Таким образом, в полученной «наложенной» системе (см. Рис. 04) во всех вершинах многоугольника теперь находится по заряду q_0 (согласно пункту 1.1 поле такой системы равно нулю), и в первой точке «появился» заряд $(-nq_0)$.

Следовательно, суммарное поле $\vec{E}_s$ такой «наложенной» системы зарядов в центре O многоугольника совпадает с полем отрицательного заряда $(-nq_0)$, находящегося в первой точке цепочки, т.е.

$$E_s = \frac{nq_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (7)$$

С другой стороны из равнобедренного треугольника напряженностей (см. Рис. 03) получим

$$E_s = 2E_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow E_2 = \frac{E_s}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) получаем искомое значение

$$E_2 = \frac{nq_0}{8\pi\epsilon_0 R^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{nq_0}{8\pi\epsilon_0 R^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} E_0, \quad (9)$$

где $E_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ есть напряженность поля, создаваемого в центре многоугольника первым (наименьшим) зарядом.

Для задания вектора $\vec{E}_2$ помимо его модуля (9) необходимо определить также и его направление в плоскости рисунка. На практике для этого достаточно найти угол, образуемый данным вектором с какой либо осью или отрезком.

В нашем случае удобно найти угол β , образованный искомым вектором $\vec{E}_2$ с радиусом, проведенным из центра O многоугольника к первому заряду (см. Рис. 03).

Из равнобедренного треугольника напряженностей, учитывая равенство углов при основании, найдем

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{n-2}{2n} \pi. \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) полностью задают искомым вектор $\vec{E}_2$, приложенный в точке O (центре правильного n – угольника, где $n \geq 2$).

Интересно, что при $n = 2$ «правильный многоугольник» представляет собой два заряда q_0 и $2q_0$, находящиеся на концах диаметра окружности (т.е. с точки зрения математики его «не существует», т.к. класс правильных многоугольников начинается с правильного треугольника ($n = 3$)). Но, несмотря на это, формулы (9) и (10) дают правильные физические результаты ($E_2 = E_0$, $\beta = 0$)!

1.3 Для вычислений с использованием (9) и (10) необходимо знать количество вершин n правильного многоугольника.

Из Рис. 02 следует, что для того, чтобы вектор $\vec{E}_2$ проходил (был «нацелен») через третью вершину многоугольника, угол φ должен удовлетворять условию

$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \frac{n-2}{2n} \pi = 2 \frac{2\pi}{n} \Rightarrow n = 10. \quad (11)$$

Следовательно, искомый правильный многоугольник является правильным десятиугольником ($n = 10$). В таком случае

$$\alpha = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = 0,628 \text{ рад} = 36,0^\circ. \quad (12)$$

Расчеты по найденным формулам (9) и (10) дают

$$E_2 = \frac{10 \cdot 151 \times 10^{-9}}{8 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \times 10^{-12} (1,52)^2 \times \sin\left(\frac{6,28}{10}\right)} \frac{\text{В}}{\text{м}} = \{5003,785076\}^1 = 5,00 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 5,00 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}, \quad (13)$$

$$\beta = \frac{10-2}{2 \cdot 10} \pi = \frac{2\pi}{5} = 1,26 \text{ рад} = 72,0^\circ. \quad (14)$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по три значащие цифры, поскольку все данные условия приведены с тремя значащими цифрами (не путать с цифрами после запятой!).

Часть 2. Геометрическая электростатика

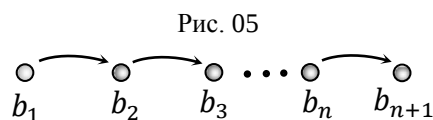
2.1 Из-за малости заряженных шариков можно считать все заряды в вершинах многоугольника точечными.

Как следует из закона Кулона, первый заряд цепочки $q_1 = q_0$ создает в центре O многоугольника напряженность электростатического поля

$$E_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \{587,972293\} = 588 \frac{\text{В}}{\text{м}}, \quad (15)$$

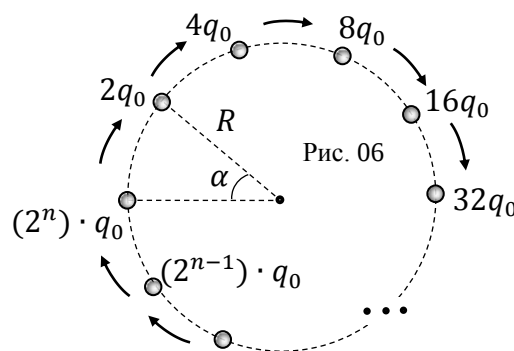
причем вектор $\vec{E}_0$ направлен вдоль радиуса описанной окружности от заряда q_1 к центру O многоугольника (Рис. 05).

2.2 Как известно, при геометрической прогрессии каждый ее следующий член больше предыдущего члена в одно и то же число раз. Соответственно, если умножить все члены геометрической прогрессии на ее знаменатель q , то ее первый член b_1 перейдет во второй b_2 , второй b_2 – в третий b_3 и т.д. При этом вся цепочка «сдвинется» на один шаг влево (Рис. 05).

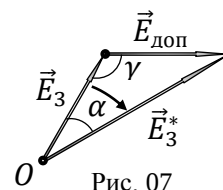


Это соображение и положим в основу следующего модернизированного «метода поворота» для вычисления напряженности $\vec{E}_3$ электростатического поля, создаваемого данной системой электрических зарядов.

Умножим все заряды системы на 2 (т.е. на знаменатель q геометрической прогрессии) и повернем систему на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ так, чтобы каждый заряд «перешел» в соседнюю позицию (Рис. 06).



Понятно, что после такого «искусственного» преобразования и поворота системы зарядов вектор $\vec{E}_3^*$ ее новой напряженности поля также удвоился по модулю (стал $2E_3$) и также повернулся на угол α относительно своего начального положения, что удобно изобразить на векторной диаграмме (Рис. 07).



¹ — здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

С другой стороны, как следует из Рис. 06, «сторонний наблюдатель» отметит, что после такой операции все заряды (за исключением первого) не изменились и «остались на своих местах». Только в первой вершине правильного многоугольника «исчез» заряд q_0 , но «появился» новый заряд $(2^n) \cdot q_0$.

Но мы можем считать, что в первой вершине многоугольника одновременно находятся два заряда: первый заряд q_0 , а второй $(2^n - 1) \cdot q_0$. Тогда можно сказать, что старая система зарядов «осталась» на месте, но в ее первой точке появился дополнительный заряд $(2^n - 1) \cdot q_0$.

Этот заряд создает в центре многоугольника дополнительную напряженность $\vec{E}_{\text{доп}}$ электростатического поля

$$\vec{E}_{\text{доп}} = (2^n - 1) \cdot \vec{E}_0. \quad (16)$$

Как следует из (16) вектор этой дополнительной напряженности поля направлен вдоль радиуса к центру O многоугольника (см. Рис. 07), т.е. так же, как и вектор $\vec{E}_0$.

Из векторного треугольника напряжённостей (Рис. 07) выразим итоговый вектор $\vec{E}_3^*$ и запишем теорему косинусов для стороны треугольника $\vec{E}_{\text{доп}}$ с учетом (16)

$$\vec{E}_3^* = \vec{E}_3 + \vec{E}_{\text{доп}}, \quad (17)$$

$$(E_{\text{доп}})^2 = (E_0 \cdot (2^n - 1))^2 = E_3^2 + 4E_3^2 - 2E_3(2E_3) \cos \alpha. \quad (18)$$

Из (18) находим искомое значение

$$E_3 = \frac{2^{n-1}}{\sqrt{5-4 \cos \alpha}} E_0 = \{(15)\} = \frac{(2^{n-1}) \cdot q_0}{4\pi \epsilon_0 R^2 \sqrt{5-4 \cos(\frac{2\pi}{n})}}. \quad (19)$$

Для задания направления вектора $\vec{E}_3$ найдем по теореме синусов угол γ треугольника, противолежащий стороне $\vec{E}_3^*$

$$\frac{E_{\text{доп}}}{\sin \alpha} = \frac{E_3^*}{\sin \gamma} = \frac{2E_3}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2E_3}{E_{\text{доп}}} \sin \alpha. \quad (20)$$

С учетом (16) и (19) окончательно получаем

$$\sin \gamma = \frac{2(2^{n-1})}{\sqrt{5-4 \cos \alpha}} E_0 \cdot \frac{\sin \alpha}{E_0 \cdot (2^n - 1)} = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{5-4 \cos \alpha}} = \frac{2 \sin(\frac{2\pi}{n})}{\sqrt{5-4 \cos(\frac{2\pi}{n})}}. \quad (21)$$

Выражения (19) и (21) полностью задают искомый вектор $\vec{E}_3$, приложенный в точке O (центре правильного n -угольника).

2.3 Для вычислений с использованием (19) и (21) необходимо знать количество вершин n правильного многоугольника.

Согласно условию, для искомого многоугольника $\vec{E}_3 \perp \vec{E}_0$, т.е. треугольник напряженностей (см. Рис. 7) – прямоугольный. Следовательно, в этом случае

$$\sin \gamma = \sin \frac{\pi}{2} = 1 = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{5-4 \cos \alpha}}. \quad (22)$$

Из (22) получаем квадратное уравнение относительно $\cos \alpha$, единственный корень которого

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ. \quad (23)$$

Из (23) находим число сторон n правильного многоугольника

$$n = \frac{2\pi}{\alpha} = 6, \quad (24)$$

т.е. в данном случае получается правильный шестиугольник.

Расчеты по найденным формулам (9) и (10) дают

$$E_3 = \frac{(2^6 - 1) \cdot 151 \times 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \times 10^{-12} \cdot (1,52)^2 \sqrt{5 - 4 \cos\left(\frac{6,28}{6}\right)}} = \{21392,91265\} = 21,4 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right) = 21,4 \left(\frac{\text{кВ}}{\text{м}}\right). \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ рад} = 90,0^\circ. \quad (26)$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по три значащие цифры, поскольку все данные условия приведены с тремя значащими цифрами (не путать с цифрами после запятой!).