Вариант 2

Задания теоретического тура

1. Кульминация Солнца. (20 баллов)

Астроном-любитель, находясь на поверхности Земли на расстоянии $9000\,км$ от ее полюса, каждый день в течение 2023 года наблюдал кульминацию Солнца.

Определите:

а) географическую широту его местоположения;

б) максимальное и минимальное зенитное расстояние Солнца во время наблюдений;

в) время прохождения диска Солнца через небесный меридиан;

г) оцените местное солнечное время восхода Солнца, в тот день, когда время прохождения его через небесный меридиан было минимально.

Подсказка: Землю считаем шаром, размеры которого определяют одну из основных единиц СИ.

Полезна формула: $\eta = 7{,}53\cos(B) + 1{,}5\sin(B) - 9{,}87\sin(2B), B = \frac{360°(N-81)}{365}$.

Решение:

а) Географическая широта местоположения: $\varphi = \pm\frac{(10000-9000)}{10000}\cdot 90° = \pm 9°$.

б) Зенитное расстояние Солнца в верхней кульминации находим по формуле:

$$z = |\delta - \phi|,\quad \begin{array}{l} z_1 = |23°26' - 9°| = 14°26' \\ z_2 = |-23°26' - 9°| = 32°26 \end{array}.$$

Таким образом:

$z_{\min} = 0$ - зенит, такое в тропиках бывает два раза каждый год; $z_{\max} = 32°26'$.

в) Максимальный и минимальный угловые диаметры Солнца:

$$D_{\max} = \frac{1392}{149600\cdot(1-0{,}017)}\cdot\frac{206265}{60\cdot 15} = 2{,}17^{мин}$$

$$D_{\min} = \frac{1392}{149600\cdot(1+0{,}017)}\cdot\frac{206265}{60\cdot 15} = 2{,}10^{мин}.$$

Максимальное и минимальное время прохождения:

$$\Delta t_{\max} = \frac{D_{\max}}{\cos(23°26')} = 2^{мин}22^{с}, \Delta t_{\min} = \frac{D_{\min}}{\cos(0°00')} = 2^{мин}6^{с}.$$

г) Осеннее равноденствие, во время весеннего угловой диаметр Солнца больше:

$$B = \frac{360°(266-81)}{365} = 182{,}47°,$$

$$\eta = 7{,}53\cos(182{,}47°) + 1{,}5\sin(182{,}47°) - 9{,}87\sin(2\cdot 182{,}47°) = -8^{мин}26^{с}.$$

$$T_m = 12^{ч} - a\cos\left(\frac{\cos z - \sin\delta\cdot\sin\varphi}{\cos\delta\cdot\cos\varphi}\right) + \eta =$$

$$= 12^{ч} - a\cos\left(\frac{\cos 90°51' - \sin(0°00')\cdot\sin(\pm 9°00')}{\cos(0°00')\cdot\cos(\pm 9°00')}\right) - 8^{мин}26^{с} = 5^{ч}48^{мин}$$

Ответ: а) $\varphi = \pm 9°$; б) $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 32°26'$; в) $\Delta t_{\max} = 2^{мин}22^{с}$. $\Delta t_{\min} = 2^{мин}6^{с}$;

г) $T_m = 5^{ч}48^{мин}$.

2. Искусственный спутник Земли. (20 баллов)

С высоты $1000\,км$ от поверхности сферической невращающейся планеты, размеры которой равны размерам Земли, со скоростью $10{,}0\,\frac{км}{с}$ запускают ее искусственный спутник. Орбита спутника позволяет ему совершить достаточно большое число оборотов вокруг планеты с круговой скоростью $v_0 = 5\frac{км}{с}$.

Рассчитайте:
а) эксцентриситет орбиты спутника;
б) большую полуось орбиты спутника;
в) минимальную скорость движения спутника;
г) период обращения спутника.

Подсказка: в месте старта скорость спутника максимальна.

Решение:

а) Скорость спутника в перигее:

$$v_q = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}v_0.$$

Эксцентриситет орбиты:

$$e = \frac{\frac{v_q^2}{v_0^2}-1}{\frac{v_q^2}{v_0^2}+1} = \frac{4-1}{4+1} = 0{,}6.$$

б) Большая полуось орбиты спутника:

$$a = \frac{q}{1-e} = \frac{6400+1000}{1-0{,}6} = 18500\,км.$$

в) Минимальная скорость движения спутника:

$$v_Q = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}v_0 = \sqrt{\frac{1-0{,}6}{1+0{,}6}}\cdot 5 = 2{,}5\frac{км}{с}.$$

г) Период обращения спутника:

$$T = \frac{2\pi a}{v_0} = \frac{2\pi\cdot 18500}{2{,}5} = 6^ч 27^{мин} 28^с.$$

Ответ: а) $e = 0{,}6$; б) $a = 18500\,км$; в) $v_Q = 2{,}5\frac{км}{с}$; г) $6^ч 27^{мин} 28^с$.

3. Звезды главной последовательности. (20 баллов)

Звезда, светимость которое вдвое меньше светимости Солнца, «живет» на главной последовательности уже $1{,}00 \cdot 10^9$ *лет*.

а) Чему равна (в массах Солнца) ее масса?

б) Во сколько раз эффективная температура поверхности звезды больше эффективной температуры поверхности Солнца?

в) К какому спектральному классу она относится?

г) Через сколько миллиардов лет звезда покинет главную последовательность?

Решение:

Все расчеты в единицах, отнесенных к Солнцу.

а) Зависимость светимость-масса для звезд главной последовательности:

$L = m^{3,9}$

Масса звезды:

$$m = L^{\frac{1}{3,9}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3,9}} = 0{,}84\,.$$

б) Зависимость светимость-радиус для звезд главной последовательности:

$L = R^{5,2}$.

Радиус звезды:

$$R = L^{\frac{1}{5,2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5,2}} = 0{,}88\,.$$

Закон Стефана-Больцмана:

$$\frac{L}{L_S} = \frac{R^2}{R_S^2} \cdot \frac{T^4}{T_S^4}$$

$$\frac{T^4}{T_S^4} = \frac{L}{L_S} : \frac{R^2}{R_S^2} \Rightarrow \qquad .$$

$$\frac{T}{T_S} = \left(\frac{L}{R^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{0{,}5}{0{,}88^2}\right)^{\frac{1}{4}} = 0{,}90$$

в) Температура звезды:

$T = 0{,}90 T_S = 0{,}90 \cdot 5800 = 5213 K$.

Спектральный класс: G.

г) Время жизни звезды на главной последовательности:

$$t = \frac{10^{10}\,\textit{лет}}{m^3} = \frac{10^{10}\,\textit{лет}}{0{,}84^3} = 17{,}04\,\textit{млрд.лет}\,.$$

Осталось:

$\Delta t = t - 1 = 16{,}04\,\textit{млрд.лет.}$

Ответ: а) $m = 0{,}84$; б) $T = 0{,}90$; в) спектральный класс G; г) $\Delta t = 16{,}04\,\textit{млрд.лет.}$

4. Движение звезды. (20 баллов)

Некая звезда, тригонометрический параллакс которой $\pi'' = 0{,}0375''$, красное смещение в ее спектре $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -4{,}15 \cdot 10^{-5}$, а собственное движение $\mu = 0{,}0543 \frac{''}{год}$, движется с постоянной относительно Солнца скоростью.

а) Чему равна (величина и направление) вышеуказанная скорость?

б) Через сколько миллионов лет расстояние от нее до Солнца уменьшится в 2 раза?

в) Через сколько миллионов лет блеск звезды станет максимальным?

г) Чему будет равно собственное движение звезды при этом?

Решение:

а) Лучевая скорость звезды: $v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c = -4{,}14 \cdot 10^{-5} \cdot 300000 = -12{,}45 \frac{км}{с}$.

Тангенциальная скорость звезды: $v_t = 4{,}74 \frac{\mu}{\pi''} = 4{,}74 \frac{0{,}0543}{0{,}0375''} = 6{,}86 \frac{км}{с}$.

Величина скорости звезды:

$v = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = \sqrt{12{,}45^2 + 6{,}86^2} = 14{,}22 \frac{км}{с}$.

Направление:

$q = a\tan\left(\frac{v_t}{v_r}\right) = a\tan\left(\frac{6{,}86}{12{,}45}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = -28°52'3''$.

б) Расстояние до звезды: $r_0 = \frac{1}{\pi''} = \frac{1}{0{,}0375} \cdot 206265 \cdot 149600000 = 8{,}23 \cdot 10^{14}\,км$.

Расстояние до звезды через время t:

$r = \sqrt{(r_0 + v_r \cdot t)^2 + v_t^2 \cdot t^2}$.

Решим уравнение:

$r_0 = 2 \cdot \sqrt{(r_0 + v_r \cdot t)^2 + v_t^2 \cdot t^2}$

$t_1 = 1{,}37\,млн.лет, \qquad t_2 = 1{,}84\,млн.лет$.

в) Время движения до того момента, когда блеск звезды максимален:

$t = \frac{t_1 + t_2}{2} = 1{,}61\,млн.лет$.

г) При минимальном расстоянии до звезды $v_t = v = 14{,}22 \frac{м}{с}$.

Расстояние до звезды:

$r = \sqrt{(r0 + v_r t)^2 + v_t^2 t^2} = 3{,}97 \cdot 10^{14}\,км = 12{,}9\,пк$.

$v_t = v = 14{,}22 \frac{км}{с}$.

Собственное движение: $\mu = \frac{v}{4{,}74 \cdot r} = \frac{14{,}22}{4{,}74 \cdot 12{,}9} = 0{,}233 \frac{''}{год}$.

Ответ: а) $v = 14{,}22 \frac{км}{с}$, $q = -28°52'3''$; б) $t_1 = 1{,}37\,млн.лет$ $t_2 = 1{,}84\,млн.лет$;

в) $t = 1{,}61\,млн.лет$; г) $\mu = 0{,}233 \frac{''}{год}$.

5. Расширяющаяся Вселенная. (20 баллов)

Как известно, в настоящее время значение масштабного фактора равно единице.

Приняв во внимание величину постоянной Хаббла такой, как приведено в школьном учебнике астрономии, рассчитайте:

а) хаббловское время в миллиардах лет;

б) значение красного смещения $10\,млрд.лет$ тому назад.

в) Каково было красное смещение в момент времени, когда плотность космического вакуума стала больше плотности всего остального?

г) Чему было равно красное смещение тогда, когда плотность Вселенной соответствовала планковской плотности?

Подсказка: необходимые для расчета величины «вспомните».

Решение:

а) Хаббловское время:

$$\tau = \frac{1}{H} = \frac{1 \cdot 1000000 \cdot 149600000 \cdot 206265}{70} = 4{,}41 \cdot 10^{17}\,c = 13{,}97\,млрд.лет\,.$$

б) Время $\tau_1 = \tau - 10 = 3{,}97\,млрд.лет$.

Красное смещение:

$$z_1 = \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = \left(\frac{13{,}97}{3{,}97}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 1{,}31.$$

в) Плотность космического вакуума стала больше плотности всего остального $5\,млрд.лет$ тому назад, поэтому:

$$\tau_2 = \tau - 5 = 8{,}97\,млрд.лет$$

$$z_2 = \left(\frac{\tau}{\tau_2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = \left(\frac{13{,}97}{8{,}97}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0{,}34\,.$$

г) Планковская плотность:

$$\rho_{Pl} = 10^{97}\,\frac{кг}{м^3}\,.$$

Критическая плотность:

$$\rho_{кр} = \frac{3 \cdot H^2}{8 \cdot \pi \cdot G} = \frac{3 \cdot \left(\dfrac{70}{1000000 \cdot 149600000 \cdot 206265}\right)^2}{8 \cdot \pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 9{,}21 \cdot 10^{-27}\,\frac{кг}{м^3}\,.$$

Красное смещение:

$$z_3 = \left(\frac{\rho_{Pl}}{\rho_{кр}}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{10^{97}}{9{,}21 \cdot 10^{-27}}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1{,}03 \cdot 10^{41}.$$

Ответ: а) $\tau = 13{,}97\,млрд.лет$; б) $z_1 = 1{,}31$; в) $z_2 = 0{,}34$; г) $z_3 = 1{,}03 \cdot 10^{41}$.