УДК 372.851

Воспитательный эффект уроков математики: современный аспект

Пирютко Ольга Николаевна,
доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка,
кандидат педагогических наук,
доцент; *o.n.pirutka@gmail.com*

В статье рассматриваются некоторые направления реализации воспитательного потенциала уроков математики в контексте развития школьного математического образования и методики преподавания учебного предмета. Данные направления касаются методических аспектов формирования культуры мышления, читательской и математической грамотности, моральных качеств, составляющих предмет воспитания при обучении математике.

Ключевые слова: воспитание; культура мышления; функциональная грамотность; моральные аспекты; уроки математики; методические аспекты математики.

Планируя свою обучающую деятельность, учитель наряду с познавательными и развивающими формулирует и воспитательные цели урока. С одной стороны — это абсолютно признанный и значимый его компонент, а с другой — в его реализации на уроках, в частности математики, обнаруживается определённый формализм. Педагогом постоянно ставится одна и та же цель: воспитывать настойчивость, аккуратность, внимательность, развивать логическое мышление. Но в предлагаемых учителем конспектах уроков или других формах их предъявления (например, в многочисленных видеозаписях в Интернете) не обнаруживается его обучающей деятельности по реализации этой цели. «Предъявление знаний» в виде монолога учителя, «закрепление», которое в основном заключается в стремлении решить как можно больше тренировочных заданий без анализа способа деятельности, и проверка, представленная в виде самостоятельной работы учащихся по вариантам, как часть контролирующей функции учителя, — таковы закрепившиеся в педагогической практике структура и содержание стандартного урока.

Достаточно часто, стремясь к цели «чтобы было увлекательно», учитель, не владея методами и приёмами, которые формируют интерес к математике ею же самой, использует игры, кроссворды, тесты, не требующие математических знаний и не развивающие познавательные компетенции учащегося. Особенно это характерно для так называемых открытых уроков.

Воспитательная роль урока математики глубоко проанализирована Александром Яковлевичем Хинчиным (1894—1959) — математиком, членом-корреспондентом АН СССР. Однако современные реалии требуют уточнения и детализации рассматриваемой функции уроков математики. Процесс компьютеризации коснулся и «школьной» математики: изменились программы, многие их составляющие, ставшие неактуальными (например, таблицы логарифмов), ушли в прошлое, а появление компьютерных программ изменило технологии обучения. Методика преподавания математики также претерпевает изменения: от «объяснения и закрепления» — к эвристическому диалогу и «открытию» знаний с применением их в различных изменённых ситуациях, в том числе в практических, жизненных.

Одной из важнейших задач, поставленных в Концепции развития системы образования Республики Беларусь до 2030 года, является формирование функциональной грамотности учащихся, а основным подходом в обучении обозначен компетентностный. Ориентация на формирование функциональной грамотности учащихся, закреплённая в Концепции развития системы образования, предусматривает:

а) изменение образовательной парадигмы — компетентностный подход;
б) содержание обучения — комплексное (междисциплинарное) изучение проблем, включая жизненные ситуации;
в) характер обучения и взаимодействия участников образовательного процесса — сотрудничество, деятельностный подход;
г) доминирующий компонент организации образовательного процесса — практико-ориентированная, исследовательская и проектная деятельность, основанная на проявлении самостоятельности, активности, творчестве учащихся.

Произошедшие в указанных контекстах изменения позволяют говорить о детализации прежних и реализации новых воспитательных возможностей и эффектов уроков математики.

Воспитание культуры мышления.

Это направление и его компоненты точно и полно представлены А. Я. Хинчиным и включены в список составляющих математической грамотности. Однако им же отмечается: «Потребность в логической полноценности аргументации воспитывается не постоянным надоедающим напоминанием о необходимости этой полноценности, а показом на конкретных примерах (поводы к которым даёт почти каждый урок), как несоблюдение этого требования ведёт к ошибкам и неувязкам. Надо не отвлечённо проповедовать полноценность аргументации, а приучить учащегося к тому, что каждый пробел в аргументации немедленно вызывает придирчивый вопрос со стороны учителя или, что много лучше, со стороны товарищей» [1, с. 22]. Вот эта проблема — «не проповедовать», а «приучать» остаётся главной и востребованной для учителя. А. Я. Хинчин так отмечает значимость методики и технологии этого процесса: «Воспитывающий процесс имеет решающее значение для логической культуры мышления; вопрос о том, какими приёмами наиболее эффективно можно добиться этих целей, есть уже методическая задача» [1].

Так как культура мышления проявляется прежде всего в культуре речи, не только математической, но и любой другой, то её формирование — первоочерёдная задача учителя. Отметим, что математическая грамотность — один из ключевых компонентов функциональной грамотности, тесно связанный с другими её компонентами, в частности, с читательской грамотностью. Их формирование в значительной мере зависит от уровня грамотности учителя, который должен:

а) уметь чётко и структурированно формулировать вопросы;

б) свободно владеть математическими знаниями, точной терминологией;
в) своевременно и точно фиксировать и исправлять ошибки грамматического и логического характера.

Напомним основные способы построения определения понятия. Это:

1. Указание ближайшего рода и видового отличия.

Пример 1. Определение понятия «прямоугольник».

Прямоугольником называется параллелограмм (родовой признак), у которого углы прямые (видовое отличие).

2. Перечисление всех существенных признаков понятия.

Пример 2. Определение понятия «параллельные прямые».

Две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, называются параллельными.

Существенные признаки двух параллельных прямых:
а) лежат в одной плоскости;
б) не имеют общих точек.

Пример 3. Определение понятия равносильности уравнений.

Два уравнения называются равносильными, если:
а) каждый корень первого уравнения является корнем второго;
б) каждый корень второго уравнения является корнем первого.

3. Аксиоматический способ определения понятий.

Пример 4. Определение площади простой фигуры.

Площадь простой фигуры — это неотрицательная величина, числовое значение которой имеет следующие свойства:
а) равные фигуры имеют равные площади;
б) если данную фигуру можно разбить отрезками на простые фигуры, то её площадь будет равна сумме площадей простых фигур;
в) площадь квадрата со стороной a равна a^2.

4. Генетический способ (конструктивное определение).

Пример 5. Определение призмы.

Рассмотрим две параллельные плоскости; в одной из них построим n-угольник; через его концы проведём параллельные прямые до пересечения со второй плоскостью. Точки пересечения прямых — вершины n-угольника. Полученный таким образом многогранник называется призмой.

Если определение представлено указанием ближайшего рода и видового отличия понятия, то вопрос к учащемуся может быть сформулирован так: «Что называется (параллелограммом)?» или же в форме: «Дайте определение (параллелограмма); «Что называется параллельными прямыми?» или «Какие прямые называются параллельными?», «Дайте определение параллельных прямых». Очевидно, что последние варианты ориентируют учащегося на овладение определением понятия, его логической структурой, пониманием сущности определения.

Другая проблемная сторона формулирования вопроса об определении понятия — это непонимание требований к уровню формирования понятия.

1 уровень. Есть условия на базе учебного предмета «Математика» для формирования точного определения нового понятия; *2 уровень.* Возможно знакомство с понятием лишь на уровне представления о нём.

Для учителя должно быть основным ориентиром следующее: если в соответствии с программой цель изучения понятия включает точное его определение, то оно сформулировано в учебном пособии, а методика формирования определения этого понятия представлена в методическом пособии. Как правило, формированию определения предшествует работа с практической задачей, приводящая к необходимости рассмотрения нового понятия и его определения.

Приведём пример формирования точного определения понятия многочлена *(1 уровень).*

1. Рассматривается практическая задача.

Каков объём трёх хранилищ зерна, если одно из них есть куб с ребром a метров, а два других — одинаковые прямоугольные параллелепипеды с измерениями m, n и k метров?

Решение.

Объём куба равен a^3 $м^3$, объём прямоугольного параллелепипеда — произведению mnk $м^3$.Тогда объём трёх хранилищ равен $(a^3 + 2mnk)$ $м^3$.

2. Выполняется анализ полученного ответа. При решении многих задач получаются выражения, которые имеют вид суммы одночленов. Такие выражения называются многочленами.

3. Формулируется определение: «Многочленом называется сумма одночленов».

2 уровень. Укажем на часто встречающийся неправомерный вопрос учителя, обращённый к учащемуся V класса: «Какие числа называются натуральными?». Однако определение понятия натуральных чисел даётся аксиоматически при рассмотрении числовых множеств в высшей математике с помощью аксиом Пеано. В V классе после изучения математики в начальной школе у учащихся складывается лишь представление о натуральных числах как числах, необходимых для счёта, и оно остаётся таковым во всём курсе школьной математики.

Основными объектами изучения и применения на уроках математики являются определения и теоремы. Очевидно, что процесс их освоения учащимися должен выступать и процессом реализации воспитательного аспекта данного учебного предмета. На сегодняшний день изучение теорем в школе, как правило, касается лишь содержания доказательства. Вопросы выделения условия, заключения теоремы остаются непроработанными, в стороне от формирования понимания значимости обоснования утверждений учащимися. Зачастую они просто рассказывают доказательство и не могут выделить данные и искомые, сформулировать теорему в импликативной форме. Представлений об обратной, противоположной прямой, противоположной обратной теоремах (высказываниях) у учащихся практически нет. Отсутствие понимания знаний об эквивалентности прямой и противоположной обратной теорем приводит к формальности в применении доказательства утверждений методом «от противного». Одна из типичных «классических» ошибок: ссылка на прямую теорему Виета вместо того, чтобы применить обратную ей при определении корней уравнения по их сумме и разности.

Для формирования функциональной грамотности значимым является понимание и умение использовать необходимые и достаточные условия, выполнение которых обеспечивает решение проблем, касающихся не только учебной математической, но и других сторон жизни. Это возможно лишь при реализации постоянной логической схемы изучения теорем и их видов. «Все эти важнейшие методологические навыки, необходимые в любой научной и практической деятельности, в значительной степени воспитываются и укрепляются вместе с повышением математической культуры» [1, с. 127].

Необходимые и достаточные условия.

Остановимся на поэтапном формировании культуры диалога, содержащего выявление необходимых и достаточных условий для решения проблемы. Методика их формирования включает следующие этапы.

1. Формулируется утверждение в импликативной форме.

Поскольку необходимые и достаточные условия фигурируют не только в математических рассуждениях, то на первом этапе целесообразно рассмотреть высказывания практического содержания. Например, утверждение «Во время дождя асфальт мокрый» в импликативной форме будет иметь следующий вид: «Если идёт дождь, то асфальт мокрый».

2. Формулируются три утверждения: обратное данному, противоположное данному, противоположное обратному.

«Если асфальт мокрый, то идёт дождь», «если не идёт дождь, то асфальт не мокрый», «если асфальт не мокрый, то дождь не идёт». Практический опыт позволяет учащимся сделать вывод о ложности обратной и противоположной прямой теорем.

3. Иллюстрируется приём образования необходимых и достаточных условий и установления их истинности.

Для формулирования теоремы с термином «достаточно» нужно перед её заключением вставить слово «для», а перед условием — «достаточно»: «Для того чтобы асфальт был мокрым, достаточно, чтобы шёл дождь». Это утверждение истинно, с одной стороны, из практических соображений, с другой — истинность следует из справедливости первого утверждения (прямой теоремы). При формулировании теоремы с термином «необходимо» нужно перед условием вставить слово «для», а перед заключением — «необходимо»: «Для того чтобы утверждать, что идёт дождь, необходимо наличие мокрого асфальта». Если прямая и обратные теоремы верны, то утверждение можно сформулировать терминами «необходимо» и «достаточно». Как видно из примеров, в данном случае этого сделать нельзя.

4. Применение знаний о видах теорем в различных изменённых ситуациях, включая и практические.

Несильно изменённые условия.

Рассматриваются тренировочные упражнения на формулирование видов теорем, например, «в ромбе диагонали перпендикулярны», «катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы».

В соответствии с методическими закономерностями применение формируемых понятий (необходимые и достаточные условия) переносится в *достаточно сильно изменённые условия*. Приведём примеры таких заданий.

А. «Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания касательной к окружности».

В импликативной форме это выражается следующим образом: «Если прямая — касательная к окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания». Трудностей с формулировкой теоремы в импликативной форме нет, а вот попытки поменять условие и заключение приводят к ошибочной формулировке обратной теоремы: «Если радиус окружности перпендикулярен касательной, то он проведён в точку касания». Верным будет утверждение: «Если прямая, имеющая с окружностью общую точку, перпендикулярна радиусу окружности, проведённому в эту точку, то эта прямая касательная к окружности в этой точке». Противоположная прямой теорема имеет следующую формулировку: «Если прямая — не касательная к окружности, то она не перпендикулярна радиусу, проведённому в общую точку прямой и окружности», а теорема, противоположная обратной, определяется так: «Если прямая, имеющая с окружностью общую точку, не перпендикулярна радиусу окружности, проведённому в эту точку, то эта прямая — не касательная к окружности в этой точке». Так как прямая и обратная теоремы верны, то формулируется необходимое и достаточное условие существования касательной: «Для того чтобы прямая, имеющая общую точку с окружностью, была касательной к окружности в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы радиус окружности, проведённый в эту точку, был перпендикулярен этой прямой».

Б. «Площадь треугольника равна половине произведения стороны и высоты треугольника, проведённой к этой стороне». Даже формулировка прямой и обратной теорем в импликативной форме у учащихся вызывает затруднения. Из ошибочных попыток формулирования приведём следующие: прямая теорема «Если многоугольник — треугольник, то его площадь равна половине произведения стороны и высоты треугольника, проведённой к этой стороне»; обратная этой теореме: «Если площадь многоугольника равна половине произведения стороны и высоты, то этот многоугольник — треугольник». Верной будет формулировка: «Если отрезок от вершины треугольника до его стороны есть высота треугольника, то его площадь равна половине произведения стороны и этого отрезка».

Выполнение заданий на обнаружение неправомерного применения необходимых и достаточных условий не только на учебных занятиях, но и в практических ситуациях формирует понимание объективных оснований для правильного вывода.

Например, анализ невысоких результатов школьников на тестировании содержит два утверждения. 1. «Недостаточно высокие результаты школьников указывают на недостаточное количество практических задач в учебных пособиях». Это утверждение в импликативной форме имеет вид: «Если школьники показывают невысокие результаты, то практических задач в учебных пособиях недостаточно». 2. Далее в тексте приводятся рассуждения и делается вывод (утверждение, обратное утверждению 1): «Так как в действующих учебниках представлено недостаточно практических задач, то школьники не имеют высоких результатов». Подразумевается, что оба этих высказывания истинны, поэтому формулируется необходимое и достаточное условие успешного выступления школьников: «Для того чтобы выступления школьников были успешными, необходимо достаточно большое число практико-ориентированных задач в учебнике». Это утверждение, конечно, нельзя признать абсолютно верным. Безусловно, для успеха необходимы ещё методика и технология освоения способов решения этих задач.

Правильность классификации. Классификация любых объектов является предметом деятельности людей в различных областях жизни. Воспитательное значение правильности (неверности) классификации рассматривается как на математических объектах, так и на других предметах в практических ситуациях. Правильность таковой предполагает:

- выдержанность: классификация должна проводиться по определённому основанию, остающемуся неизменным в процессе классификации;
- независимость: понятия, получающиеся в результате классификации, должны быть взаимно независимыми, то есть пересечение их объёмов должно быть пустым множеством;
- полноту: объединение объёмов понятий, получающихся при классификации, равно объёму исходного понятия.

Классические примеры ошибок при классификации объектов: в уравнении с параметрами рассматриваются только случаи положительных или отрицательных коэффициентов (пропускается ноль); при доказательстве формулы площади параллелограмма рассматриваются только один случай и соответствующий ему приём, когда высота проектируется на сторону, а не на вершину или продолжение стороны; используются неоднородные основания для классификации треугольников (рассматриваются остроугольные, прямоугольные, тупоугольные и равнобедренные).

В окружающей нас жизни можно увидеть много примеров информации, вводящей в заблуждение читателей. Приведём в качестве примера название книги «Педагогические афоризмы и изречения». Афоризмы — это виды изречений, а указанная в заглавии попытка их разделить приводит к неверному пониманию классификации через содержание книги. Высказывания вида: «У нас разработано множество проектов», «Мы имеем множество видов оборудования», «Множество школьников приняли участие в эстафете» и т. д. свидетельствуют о непонимании того, что в классификации множеств по числу их элементов есть и пустые, то есть не содержащие ни одного элемента. Математический термин «множество», перенесённый в бытовой текст, искажает смысл данного понятия.

Для воспитания культуры усвоения информации, представленной в различных формах, от учителя требуется формирование новых приёмов эффективной работы с текстом. Смещение акцентов читательской грамотности от «читать и писать» к способности воспринимать и создавать информацию в различных текстовых и визуальных форматах, в том числе и в цифровой среде, открывает новые направления в воспитании математической грамотности. Ещё более актуальной становится способность осваивать и применять математические инструменты, полноту аргументации, моделирование, рациональные вычисления, алгоритмические предписания. Анализ условия математических задач — один из приоритетных путей, ведущих к воспитанию культуры работы с информацией. Поскольку решение текстовых задач пронизывает весь курс школьной математики, то формирование алгоритмических предписаний для анализа условия задачи и его модели, составления плана решения задач и способов его реализации начинается уже в V классе.

Моральные аспекты воспитательной составляющей урока математики.

«По моему многолетнему опыту работа над усвоением математической науки неизбежно воспитывает — исподволь и весьма постепенно — в молодом человеке целый ряд черт, имеющих яркую моральную окраску и способных в дальнейшем стать важнейшими моментами в его нравственном облике» [1, с. 141]. Действительно, есть много наблюдений и выводов как опытных учителей математики, так и других участников образовательного процесса, свидетельствующих о том, что в учреждениях образования, где хорошо поставлено преподавание данного учебного предмета, нет проблем с дисциплиной, организованностью, соблюдением этических норм. Честность, правдивость, настойчивость, трудолюбие, усидчивость, упорство в достижении намеченной цели воспитываются самой деятельностью, правильно организованной учителем при изучении математики. В этой науке нет «немного недоказанного», «почти правильного», но есть огромное удовлетворение от самостоятельно решённой задачи. История математики содержит достаточно примеров проявления не только трудолюбия и усидчивости, но и мужества в признании проблем и преодолении возникающих препятствий. Один из последних тому примеров в мировой математике — история доказательства Эндрю Уайлсом последней теоремы Ферма. 21—23 июня 1993 года учёный объявил о его завершении и представил своё доказательство данной теоремы после более чем семилетнего пути к этому. Но в одной его критической части была допущена ошибка. Как отмечают математики, она не сделала бы работу Уайлса бесполезной, так как каждая её часть была очень значительной и инновационной сама по себе, как и многие созданные им в ходе этой деятельности разработки и методы. Уайлс почти год восстанавливал своё доказательство. Он утверждал, что утром 19 сентября 1994 года был на грани отказа от своих попыток и почти смирился с тем, что потерпел неудачу. Однако учёный всё же пришёл к полноценной аргументации теоремы. «Это было так неописуемо красиво; это было так просто и так элегантно. Я не мог понять, как я пропустил это, и я просто смотрел на него в недоумении в течение двадцати минут. Затем в течение дня я ходил по отделу, и я продолжал возвращаться к своему столу, глядя, есть ли оно всё ещё там. Оно всё ещё было там. Я не мог сдержаться, я был так взволнован. Это был самый важный момент моей трудовой жизни. Ничто из того, что я когда-либо сделаю снова, не будет значить так много» [3, с. 34].

В школьной среде одноклассники с большим уважением относятся к победителям математических олимпиад различных уровней, испытывают гордость за свой класс, свою школу. Значимым воспитательным компонентом уроков математики может стать использование информации об успехах школьников и студентов Беларуси в международных математических соревнованиях. Для осознания высокого уровня математической подготовки их участников — представителей нашей страны — целесообразно использовать на уроках олимпиадные задачи и их решения. Даже если они трудны для понимания, выстроенный педагогом «скелет» позволит увидеть их суть, обогащая познавательный опыт учащихся.

Научные идеи, рассматриваемые на уроках математики в контексте того или иного содержания, повышают интерес обучающихся к истории математической науки. Изучение достижений белорусских учёных в данной области становится фактором воспитания чувства гордости, даёт возможность оценить их значение для развития различных сфер науки и практики. Например, фундаментальная монография «Алгебраические группы и теория чисел» Владимира Петровича Платонова, выдающегося математика, специалиста в области алгебры, алгебраической геометрии, прикладной алгебры и криптографии, является первым в математической литературе систематическим изложением теории, лежащей на стыке теории групп, алгебраической геометрии и теории чисел. Фаина Михайловна Кириллова, доктор физико-математических наук, стала первой в истории нашего государства женщиной-математиком, была избрана членом-корреспондентом НАН Беларуси по специальности «математическая кибернетика» [2].

В заключение отметим: задача использования науки математики и учебного предмета «Математика» в воспитательных целях, стоящая перед учителем, кажется на первый взгляд достаточно сложной. Но разнообразные направления этой работы содержательны и фундаментальны. Планомерно и эффективно воздействуя на формирование необходимых качеств мышления, ценностных ориентаций, черт характера учащегося, они обеспечивают реализацию высокого воспитательного потенциала уроков математики.

Литература

1. *Хинчин, А. Я.* Педагогические статьи / А. Я. Хинчин. — М. : Изд. АПН РСФСР, 1963. — 224 с.
2. *Арефьева, И. Г.* Школа юных математиков. Алгебра. 9 класс : пособие для учащихся / И. Г. Арефьева, О. Н. Пирютко. — Минск : Аверсэв, 2019. — 94 с.
3. *Сингх, С.* Великая теорема Ферма / С. Сингх. — М. : МЦНМО, 2000. — 288 с.

Материал поступил в редакцию 23.05.2022.

THE EDUCATIONAL EFFECT OF MATHEMATICS LESSONS: A MODERN ASPECT

Olga N. Piryutko,
Associate Professor of the Department of Mathematics
and Methods of Teaching Mathematics of the Belarusian State
Pedagogical University Named after Maxim Tank,
Cand. Sci. (Pedagogics), Associate Prof.; *o.n.pirutka@gmail.com*

The article discusses some areas of the realization of the educational potential of Mathematics lessons in the context of the development of school mathematical education and methods of teaching this academic subject. The chosen directions relate to methodological aspects of the formation of thinking culture, reading and mathematical literacy, moral qualities that make up the education subject when teaching Mathematics.

Keywords: education; thinking culture; functional literacy; moral aspects; Mathematics lessons; methodological aspects of Mathematics.

Submitted 23.05.2022.