Национальный институт образования

Факультативные занятия

Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень

Геометрия
10–11 классы
Многообразие идей и методов

Пособие для учителей

Аверсэв

Национальный институт образования

Факультативные занятия

Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень

Геометрия
10–11 классы
Многообразие идей и методов

Пособие для учителей
общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

*Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь*

Минск • «Аверсэв» • 2011

УДК 372.851.4.046.14
ББК 74.262.21
Р59

Серия основана в 2010 году

Рогановский, Н. М.
Р59 Геометрия. 10—11 классы. Многообразие идей и методов : пособие для учителей общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. обучения / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2011. — 208 с. : ил. — (Факультативные занятия).
ISBN 978-985-529-666-0.

Данное пособие входит в состав учебно-методического комплекса и предназначено для организации и проведения факультативных занятий по геометрии в 10—11 классах.

Адресовано учителям общеобразовательных учреждений.

УДК 372.851.4.046.14
ББК 74.262.21

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Рогановский Николай Максимович
Рогановская Елена Николаевна
Тавгень Олег Игнатьевич

ГЕОМЕТРИЯ. 10—11 КЛАССЫ

Многообразие идей и методов

Пособие для учителей общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 06.01.2011. Формат 60×84 1/16. Бумага типографская.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,09. Уч.-изд. л. 8,36. Тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0494066 от 03.02.2009. Контактный телефон (017) 210-18-98.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Ул. М. Богдановича, 129а, 220123, Минск.
Для писем: а/я 135, 220123, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.

ISBN 978-985-529-666-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие содержит методические рекомендации к изучению теоретического материала факультативного курса «Геометрия: многообразие идей и методов» и обучению учащихся решению стереометрических задач.

Напомним, что сквозной концепцией данного факультативного курса является своевременное введение ведущих математических методов и выборочное их применение с целью рационализации школьной геометрии.

Предполагается такое изложение учебного материала, которое ориентируется на оперативное введение математических методов и позволяет в полном объеме показать роль математических методов в построении школьной геометрии. Курс предполагает совместное и выборочное применение математических методов: каждый математический метод применяется в тех случаях, когда он дает наибольшие упрощения в построении математического содержания.

Избирательное и совместное применение различных математических методов в 11-м классе можно проследить, например, при изложении темы «Геометрические преобразования». Свойства некоторых преобразований обосновываются синтетическим, координатным и векторным методами. Например, в теме «Геометрические преобразования» тот факт, что симметрия относительно плоскости и центральная симметрия являются движениями, доказывается синтетическим методом, а аналогичное предложение для поворота вокруг оси доказывается с помощью координатного и векторного методов. В ряде случаев приводятся несколько способов доказательства одного предложения. Геометрические преобразования получают определенные применения в последующих темах. Например, при введении понятия цилиндра используется параллельный перенос. Параллельный перенос используется для обоснования свойств параллелепипеда. При рассмотрении свойств параллельных сечений в пирамиде и конусе используется гомотетия.

При изучении объемов тел и площадей поверхностей широко используются методы математического анализа. Площади поверхностей отдельных тел получаются как производные их объема.

В 10—11-х классах идеи данного факультативного курса получают дальнейшее развитие. Прежде всего уделяется внимание обучению учащихся поиску решения стереометрических задач. При этом необходимо иметь в виду, что успешное решение задач возможно лишь при хорошем усвоении теоретического материала. Поэтому актуализации теоретических сведений необходимо уделять должное внимание.

Приведем некоторые **эвристические приемы**, помогающие учащимся искать решение задачи, а учителю — направлять процесс поиска. Польза от эвристических приемов несомненна: они позволяют провести решение задачи более рационально, с меньшими затратами времени, подход к каждой задаче становится более целенаправленным и системным.

В поиске решения задач особенно важны две его части: определение стратегии решения (общего замысла, плана решения) и осуществление этой стратегии.

Эвристические приемы относятся главным образом к первой части: отысканию стратегии решения задачи. Вот некоторые из таких приемов.

Анализ текста задачи. Выполнение чертежа

1. Читая задачу, сразу начинайте чертить *чертеж*, потом сделайте *краткую запись задачи*. Контролируйте себя (какие условия и требования задачи, сколько их). Это поможет быстрее и тщательнее проанализировать задачу.

2. Хороший чертеж — самый надежный помощник, плохой чертеж, напротив, затруднит решение, уведет по ложному пути. Чертеж должен быть достаточно крупным: на четверть, иногда даже на полстраницы. Проверьте, *все ли данные нанесены на чертеж*.

3. Выделите на чертеже то, *что дано* (данные элементы обведите более жирными линиями, равные отрезки пометьте черточками, равные углы — дугами, расставьте на чертеже числовые данные) и то, *что нужно найти* (искомые элементы пометьте вопросительным знаком или нарисуйте двойной линией и т. п.).

4. Проверьте правильность выполнения чертежа. Избегайте чертить фигуру для частных случаев, не предусмотренных задачей (не следует, например, неправильную пирамиду чертить как правильную). При необходимости следует улучшить первоначальный чертеж, добиться, чтобы на нем не было наслоения линий.

5. Подготовка к поиску решения задачи закончена. Далее переключите свое внимание на поиск решения.

Поиск решения

6. Не торопитесь проводить частные вычисления. Потратьте несколько минут на анализ общих особенностей задачи и данного к ней чертежа. Прежде надо усмотреть *общий замысел решения, его план*. Нельзя ли решение стереометрической задачи свести к решению некоторых планиметрических задач?

7. Подумайте, можно ли усмотреть замысел решения задачи сразу. *Какими теоретическими сведениями или ранее решенными задачами можно воспользоваться*? Вспомните определения и теоремы, которые могут оказаться полезными при решении данной задачи. На какую из ранее решенных задач можно опереться?

8. Если замысел решения оказывается неочевидным, то обратитесь снова к чертежу. Еще раз проверьте правильность его выполнения. Посмотрите, как размещены на нем данные и искомые элементы. Наметьте по возможности более краткий путь, позволяющий перейти от данных элементов к искомым. Нельзя ли сблизить их? Не окажется ли полезным в этих целях *дополнительное построение*? Помните, что удачное дополнительное построение часто дает ключ ко всему решению.

9. Сблизить данные и искомые элементы помогают *два главных метода поиска: аналитический и синтетический*. В аналитическом методе начинают с требования задачи и выясняют, что достаточно знать, чтобы ответить на вопрос задачи. В этом случае мы от требования задачи постепенно поднимаемся к условию. В синтетическом методе поиска начинают от условий задачи и задаются вопросом: «Зная такие-то условия, что можно найти?» В результате поочередного применения этих методов часто удается найти решение задачи.

10. Вот часть чертежа, в которой сконцентрировано больше данных задачи. Вероятно, что начало решения задачи будет связано именно с этой частью чертежа. Если начало решения выбрано правильно, то легче прояснить порядок остальных рассуждений.

11. Часть данных элементов расположена в некоторой плоскости, часть — вне этой плоскости. Подумайте, какая последовательность рассмотрения окажется предпочтительной — *от плоскости в пространство или, наоборот, от пространства к плоскости*.

12. На стереометрическом чертеже многие его элементы изображаются с искажением. Для наглядности и облегчения поиска решения полезно нарисовать без искажения некоторое *сечение* данной фигуры. Очень часто решение стереометрической задачи сводится к решению некоторой планиметрической. Постарайтесь заметить и сформулировать такую задачу: что дано в ней, что требуется найти?

13. Как и в планиметрии, в стереометрии также решение задачи часто сводится к рассмотрению *цепочки треугольников*. В вычислениях при этом полезными могут оказаться *теорема Пифагора, теорема синусов и теорема косинусов*.

14. Вы столкнулись с серьезными затруднениями при решении задачи и уже теряете веру в возможность ее решения. Проверьте, все ли данные были использованы при решении задачи. Подумайте, нельзя ли *сменить направление поиска.* Например, вы пытались решить задачу чисто геометрически, а возможно, проще ее решить с помощью координат, или векторов, или геометрических преобразований. Своевременное переключение на новый способ решения поможет вам выйти из затруднительного положения.

15. Иногда для решения задачи удобно ввести *дополнительную величину* (длину отрезка, меру угла и т. п.), которая условием задачи не дается. Если задача решается координатным методом, подумайте, удачно ли расположены оси системы координат.

16. Наконец решение задачи найдено: обнаружен замысел решения, его план. Теперь можно переходить к его выполнению.

Изложение решения

17. Запись решения целесообразно вести в соответствии с планом, записывая и нумеруя каждый шаг отдельно, с новой строки.

18. Пояснения и обоснования должны быть краткими (из такого-то треугольника...; на основании такой-то теоремы...). Преобразования числовых и буквенных выражений приводятся без каких-либо пояснений.

19. Не делайте «в уме» одновременно несколько сложных вычислений или преобразований выражений. Если в выкладках допущена ошибка и по выполненным записям она не обнаруживается, то лучше эти выкладки выполнить заново на чистом листе бумаги.

20. Запись решения задачи на вычисление заканчивается словом «Ответ», после которого приводятся результаты решения задачи.

Проверка решения, его возможное упрощение

21. При проверке обнаружена ошибочность решения. Попытайтесь выяснить, в какой части совершена ошибка. Если эта ошибка «технического» характера (ошибка в вычислениях, тождественных преобразованиях, неправильной записи формул и т. п.), то следует заново проверить вычисления, формулы выверить по справочнику. Более серьезная ошибка может быть связана с искажением геометрической ситуации (например, некоторый треугольник вы посчитали прямоугольным, а на самом деле он таковым не является). В таком случае более критично следует подойти к логике решения, к обоснованию отдельных его шагов. Подумайте, не допущен ли на чертеже необоснованный произвол: не возвели ли вы некоторые неточности чертежа в «ранг истины»; правильно ли построены указанные в задаче элементы.

10 класс

Тема 1 АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В СТЕРЕОМЕТРИИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Занятие 1. Введение в стереометрию. Аксиомы стереометрии

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

При изучении нового материала рекомендуется воспользоваться крупноблочным изложением учебного материала, используя конспекты, приведенные в Приложении 1. Учащимся можно также предложить эти конспекты в качестве карточек для повторения изученного материала.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1; 2 из п. 1.3 теоретической части пособия для учащихся (приводятся с решением).
Задачи 7, а—д из раздела «Задания для самостоятельной работы[1]» (устно).

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 1—4 из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 5; 6 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

Методическая схема выполнения заданий 1, а—в:

а) указанные в задании построения выполняем вначале не на фигуре-изображении, а на фигуре-оригинале;

б) выясняем, какие свойства фигуры-оригинала можно перенести на фигуру-изображение;

в) пользуясь установленными выше свойствами, строим фигуру-изображение.

Замечание. В несложных случаях п. а) и б) выполняются устно, а построения — сразу на фигуре-изображении.

[1] Здесь и далее приводятся ссылки на задания из пособия для учащихся «Геометрия. Многообразие идей и методов. 10 класс».

1, *а.*

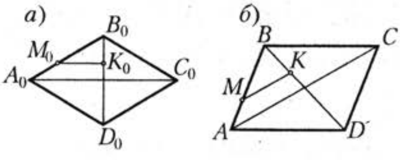


Рис. 1

Краткая запись задачи:
Ромб $A_0B_0C_0D_0$ – фигура-оригинал. Параллелограмм $ABCD$ – изображение ромба $A_0B_0C_0D_0$, $M_0 \in A_0B_0$.

Построить изображение:
1) диагоналей данного ромба;
2) точки M_0;
3) перпендикуляра M_0K_0, проведенного к диагонали B_0D_0.

Решение.

1) Изображением диагоналей ромба будут являться диагонали параллелограмма $ABCD$. Проводим эти диагонали;

2) на отрезке AB строим точку M так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_0M_0}{M_0B_0};$$

3) а) в ромбе построим $M_0K_0 \perp B_0D_0$;

б) так как $A_0C_0 \perp B_0D_0$ и $M_0K_0 \perp B_0D_0$, то $M_0K_0 \parallel A_0C_0$ (рис. 1, *а*);

в) на изображении отрезки M_0K_0 и A_0C_0 показываются параллельными отрезками MK и AC (параллельность отрезков на изображении сохраняется);

г) отсюда построение (рис. 1, *б*): строим в параллелограмме $ABCD$ отрезок $MK \parallel AC$. Отрезок MK – искомый.

5, *б.*

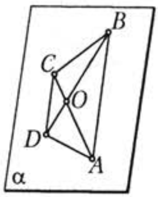


Рис. 2

Краткая запись задачи:
Четырехугольник $ABCD$ – трапеция, $O = AC \cap BD$, $A, B, C \in \alpha$ (рис. 2).

$D, O \in \alpha$?

Решение.

1) Так как трапеция – плоская фигура, то она принадлежит некоторой плоскости; обозначим эту плоскость буквой β;

2) плоскости α и β проходят через точки A, B и C, которые не лежат на одной прямой. В силу аксиомы о задании плоскости эти плоскости совпадают: $\alpha = \beta$;

3) поэтому все точки плоскости β принадлежат плоскости α, значит, $D, O \in \alpha$ (рис. 2).

6, *в*.

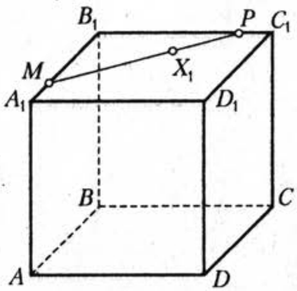


Рис. 3

Краткая запись задачи: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис. 3).
На поверхности куба изобразить точки $X_1 \in A_1B_1C_1D_1$, $X_2 \in AA_1B_1B$, $X_3 \in AA_1D_1D$, $X_4 \in ABCD$, $X_5 \in BB_1C_1C$.

План решения. Возьмем точки $M \in A_1B_1$ и $P \in B_1C_1$, проведем отрезок MP и возьмем произвольную точку X_1, принадлежащую этому отрезку; получили точку X_1, принадлежащую верхней грани; аналогично строятся точки, принадлежащие остальным граням куба.

Занятие 2. Первые следствия из аксиом стереометрии

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Использовать конспект из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 9, а—г из раздела «Задания для самостоятельной работы».

9, *а*.

Краткая запись задачи: $C \notin a$, b_i – прямые, проходящие через точку C и пересекающие прямую a.
Доказать, что прямые b_i принадлежат одной плоскости.

Замысел доказательства. Рассмотрим плоскость $\alpha = (a, C)$ и выясним, принадлежат ли прямые b_i этой плоскости.

9, *в.*

Краткая запись задачи:
ΔABC, ΔABD.

При каком расположении прямых AB и CD треугольники окажутся лежащими в одной плоскости?

Замысел решения. Высказываем предположение о том, что прямые AB и CD будут лежать в одной плоскости, если они пересекаются или параллельны. Осталось подтвердить возможность этих случаев (рис. 4, *а, б, в*).

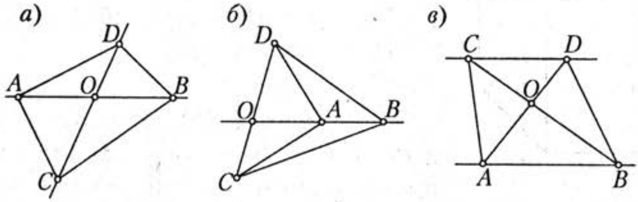


Рис. 4

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 1–4 из п. 2.2 теоретической части пособия для учащихся.
Индивидуальное задание: задачи 8; 10–12 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

8, *а.*

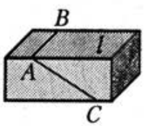


Рис. 5

Выполнение задания. Рисуем прямоугольную балку, на ребре l в заданном месте выбираем точку A и в заданных направлениях проводим прямые AB и AC. Пилу прикладываем к точке A и следим, чтобы при распиливании ее полотно проходило через прямые AB и AC (рис. 5); этот практический прием основан на теореме 2 (п. 2.1). В рассматриваемом примере плоскость распила задается двумя пересекающимися прямыми AB и AC.

10, *а.*

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

1) Доказать, что плоскость ACB_1 пересекает все прямые, параллельные AA_1.
2) Построить точку $X = ACB_1 \cap DD_1$.

Поиск решения. 1) Для доказательства достаточно воспользоваться аксиомой 5 о параллельных прямых в пространстве.

2) Нельзя ли искомую точку X построить как точку пересечения прямой DD_1 с прямой, лежащей в плоскости ACB_1? Попытаемся в плоскости ACB_1 найти такую прямую. Очевидно, эта прямая с прямой DD_1 должна лежать в одной плоскости. Рассмотрим плоскость, проходящую через параллельные ребра DD_1 и BB_1. Пусть O — середина отрезка AC. Проведем прямую B_1O. Прямые DD_1 и B_1O лежат в одной плоскости — плоскости, проходящей через ребра DD_1 и BB_1. Кроме того, эти прямые не параллельны, значит, они пересекаются. Очевидно также, что прямая B_1O лежит в плоскости ACB_1.

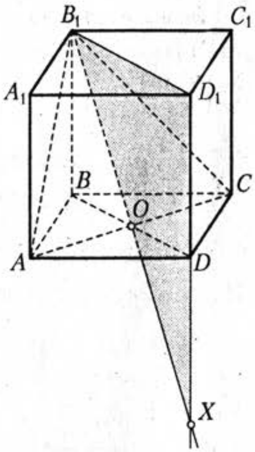


Рис. 6

Подумайте, каким образом можно воспользоваться прямой B_1O для построения точки X ... (рис. 6).

Занятие 3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Для проверки знаний учащихся использовать конспекты 1 и 2 из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из п. 3.5 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 13 из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 14 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

13, *в.*

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $M \in AA_1$, $P \in DD_1$, $Q \in CC_1$.
$ABCD$ — плоскость нижнего основания куба, $T = BC_1 \cap B_1C$.

Построить: $X = MP \cap ABC$, $Y = PQ \cap ABC$, $Z = CT \cap ABC$.

Замысел решения. Для построения точки X необходимо через прямую MP провести плоскость, пересекающую плоскость ABC. (Таким образом мы уже поступали при решении задачи 10, а.) Аналогично строится точка Y. При построении точки Z необходимо заметить, что $Z = C$.

Занятие 4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 21 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

21, *а.*

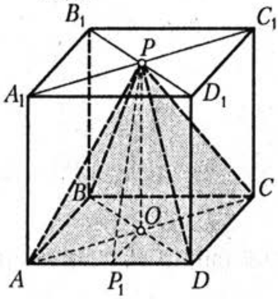


Рис. 7

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб,
P — центр верхнего основания,
O — центр нижнего основания, $AB = a$ (рис. 7).

Найти: 1) PO; 2) углы POA, POB, POC, POD;
3) PA, PB, PC, PD;
4) $\cos \angle PAO$; 5) $\cos \angle PAD$.

План решения. 1) Учесть: если AA_1C_1C — параллелограмм, то AA_1PO — также параллелограмм, и значит, $PO = AA_1 = a$;

2) принять во внимание, что AA_1C_1C является прямоугольником;

3) рассмотреть прямоугольные треугольники POA, POB, POC и POD;

4) воспользоваться прямоугольным треугольником POA;

5) провести медиану PP_1 в равнобедренном треугольнике APD и рассмотреть прямоугольный треугольник PP_1A.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 18; 19 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 20, а из раздела «Задания для самостоятельной работы».

18. (*Задача на развитие логического мышления.*)

Краткая запись задачи:
1) $AB \dot{-} CD$, 2) $AC \dot{-} BD$, 3) $AB \parallel CD$, 4) $AC \parallel BD$, 5) $AB \otimes CD$, 6) $AC \otimes BD$.

Равносильны ли утверждения 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6?

Решение. а) Для проверки равносильности утверждений 1 и 2 выясним, справедливы ли утверждения $AB \dot{-} CD \Rightarrow AC \dot{-} BD$ и $AC \dot{-} BD \Rightarrow AB \dot{-} CD$. Рассмотрим первое утверждение: $AB \dot{-} CD \Rightarrow AC \dot{-} BD$. Воспользуемся методом от противного. Допустим, что AC и BD не являются скрещивающимися прямыми. Тогда существует плоскость α, которой эти прямые принадлежат. Если $AC, BD \subset \alpha$, то $A, C, B, D \in \alpha$. Отсюда $AB, CD \subset \alpha$. Следовательно, прямые AB и CD не являются скрещивающимися. Получили противоречие с условием доказываемого утверждения. Поэтому допущение о том, что прямые AC и BD не являются скрещивающимися, неверно. Тем самым доказана справедливость утверждения $AB \dot{-} CD \Rightarrow AC \dot{-} BD$. Обратное утверждение ($AC \dot{-} BD \Rightarrow AB \dot{-} CD$) доказывается аналогично. Чтобы убедиться в этом, достаточно переобозначить точки. Вывод: из справедливости утверждений $AB \dot{-} CD \Rightarrow AC \dot{-} BD$ и $AC \dot{-} BD \Rightarrow AB \dot{-} CD$ следует равносильность утверждений 1 и 2;

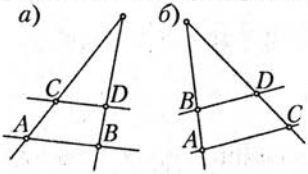


Рис. 8

б) рисунок 8, *а* свидетельствует о том, что из параллельности прямых AB и CD не следует параллельность прямых AC и BD:

$$AB \parallel CD \not\Rightarrow AC \parallel BD.$$

Это означает, что утверждения 3 и 4 не являются равносильными;

в) рисунок 8, *б* подтверждает: из пересечения прямых AB и CD не следует пересечение прямых AC и BD: $AB \otimes CD \not\Rightarrow$ $\not\Rightarrow AC \otimes BD$. Поэтому утверждения 5 и 6 не являются равносильными.

19.

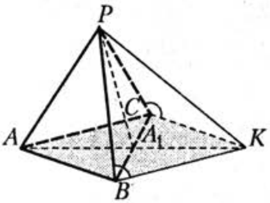


Рис. 9

Краткая запись задачи:
$PABC$ – правильный тетраэдр (рис. 9).

Доказать: $\angle(PB, AC) = \angle(PC, AB)$.

Решение. Построим углы между скрещивающимися прямыми PB и AC, PC и AB. Для этого проведем $BK \parallel AC$ и $CK \parallel AB$. Тогда $\angle(PB, AC) = \angle(PB, BK)$, $\angle(PC, AB) = \angle(PC, CK)$. Задача сводится к доказательству равенства $\angle(PB, BK) = \angle(PC, CK)$. Для выполнимости этого равенства достаточно, чтобы $\angle PBK = \angle PCK$. Рассмотрим треугольники PBK и PCK. Так как $ABKC$ – ромб, то $BK = CK$. Кроме того, $PB = PC$ и PK – общая сторона этих треугольников. Имеем: $\Delta PBK = \Delta PCK$ по трем сторонам. Поэтому $\angle PBK = \angle PCK$ и, следовательно, $\angle(PB, AC) = \angle(PC, AB)$.

20, *а.*

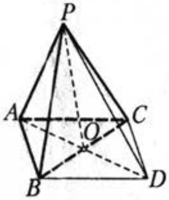


Рис. 10

Краткая запись задачи:
$PABC$ — правильный тетраэдр,
$BACD$ — параллелограмм,
$PA = a$, $BC \cap AD = O$ (рис. 10).

Найти: 1) $\cos \angle PAO$; 2) AD; 3) PD; 4) $\angle PBD$; 5) $\angle PCD$.

План решения. 1) а) Найти стороны треугольника PAO; б) зная стороны, по теореме косинусов можно найти косинус угла PAO;

2) учесть, что $AD = 2AO$;

3) воспользоваться формулой для медианы PO треугольника PAD: $PO = \frac{1}{2}\sqrt{2PA^2 + 2PD^2 - AD^2}$;

4) применить к треугольнику PBD теорему, обратную теореме Пифагора;

5) учесть, что $\angle PBD = \angle PCD$.

Занятие 5. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 20 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

20, *б.*

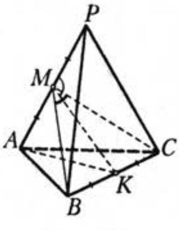


Рис. 11

Краткая запись задачи:
$PABC$ — правильный тетраэдр, M — середина PA, K — середина BC, $PA = a$ (рис. 11).

Найти: 1) $\angle PMC$; 2) $\angle PMB$; 3) $\angle PMK$; 4) $\angle BMC$.

План решения (рис. 11). 1)–3) Воспользоваться тем, что CM, BM и KM — медианы соответственно равнобедренных треугольников PCA, PBA и PKA;

4) применить теорему косинусов к треугольнику BMC. Приближенное значение угла BMC можно найти при помощи микрокалькулятора или таблицы.

20, *в.*

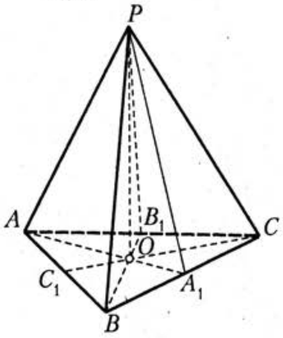


Рис. 12

Краткая запись задачи:
$PABC$ — правильный тетраэдр,
A_1, B_1, C_1 — середины соответственно ребер BC, AC, AB,
O — центр треугольника ABC, $PA = a$ (рис. 12).

Найти: 1) PO; 2) $\angle POA$; 3) $\angle POB$; 4) $\angle POC$.

План решения (рис. 12). 1) Найти стороны треугольника PAA_1, затем косинус угла PAA_1. Отрезок PO можно найти, применяя теорему косинусов к треугольнику PAO;

2) достаточно применить теорему, обратную теореме Пифагора, к треугольнику PAO;

3)—4) эти углы находятся аналогично.

20, *г.*

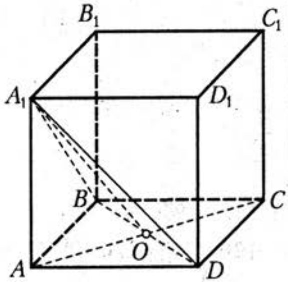


Рис. 13

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $AB = a$ (рис. 13).

Найти угол A_1AC.
Сравнить углы A_1AB, A_1AD, A_1AC.

Замысел решения (рис. 13). Пусть $O = A \cap BD$, соединим отрезком точки A и O, рассмотрим треугольник A_1AO. Из рисунка видно, что $\angle A_1AO = 90°$. С учетом этого дальнейшее решение задачи может быть таким: найдем стороны треугольника A_1AO, затем с помощью теоремы, обратной теореме Пифагора, проверим, является ли этот треугольник прямоугольным.

План решения. 1) Из прямоугольного треугольника AOD найдем AO и OD;

2) из прямоугольного треугольника A_1AD найдем A_1D;

3) докажем, что треугольник BA_1D — равнобедренный и A_1O — медиана, проведенная к его основанию;

4) установим, что треугольник A_1OD — прямоугольный;

5) найдем A_1O;

6) проверим, выполняется ли для треугольника A_1AO теорема, обратная теореме Пифагора.

Решение.

1) $AO = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

2) $A_1D = A_1B = a\sqrt{2}$;

3) п. 2 $\Rightarrow \Delta BA_1D$ – равнобедренный;

4) кроме того, A_1O – медиана, проведенная к его основанию BD;

5) в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является высотой. Поэтому $A_1O \perp BD$. Значит, треугольник A_1OD – прямоугольный;

6) поэтому по теореме Пифагора $A_1O^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2}$;

7) сравним A_1O^2 и $AO^2 + A_1A^2$:

$A_1O^2 = \frac{3a^2}{2}$; $\quad AO^2 + A_1A^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{3a^2}{2}$.

Получаем, что равенство $A_1O^2 = AO^2 + A_1A^2$ является верным. Значит, $\angle A_1AO = \angle A_1AC = 90°$.

Решение задачи завершаем сравнением углов A_1AB, A_1AD, A_1AC.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Задачи 21 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Занятие 6. Взаимное расположение прямой и плоскости: параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользоваться конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1; 2 из п. 4.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 3–5 из п. 4.2 теоретической части пособия для учащихся.

Занятие 7. Ортогональная проекция. Знаменитые теоремы о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользоваться соответствующим конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 4.4 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 1—4 из п. 4.7 теоретической части пособия для учащихся.

Занятие 8. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 22; 23 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

22, *а.*

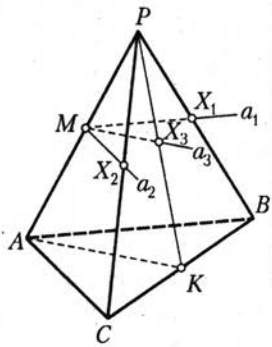


Рис. 14

Краткая запись задачи:
$PABC$ — тетраэдр, K — середина BC, $M \in PA$ (рис. 14).

Построить прямую a: 1) $M \in a$, $a \parallel ABC$, $a \subset PAB$; 2) $M \in a$, $a \parallel ABC$, $a \subset PAC$; 3) $M \in a$, $a \parallel ABC$, $a \subset PAK$.
Построить $X = a \cap PBC$.

Замысел решения. Пусть $M \notin \alpha$ и требуется через точку M провести прямую a, параллельную плоскости α (рис. 15).

Для этого через точку M проведем некоторую плоскость β, пересекающую плоскость α по прямой AB. Если теперь в плоскости β через точку M проведем прямую $a \parallel AB$, то на основании признака параллельности прямой и плоскости (теоремы 8.1) $a \parallel \alpha$.

Данная задача связана с тетраэдром. Поэтому необходимо учесть, что некоторые из указанных выше плоскостей и прямых строить не нужно, так как они оказываются уже построенными.

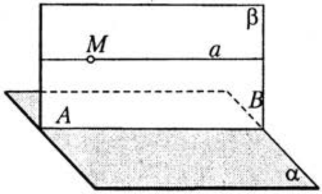


Рис. 15

Построение прямых, параллельных плоскости ABC:

1) в плоскости PAB через точку M проведем прямую a_1, параллельную AB. На основании признака параллельности прямой и плоскости $a_1 \parallel ABC$;

2) в плоскости PAC через точку M проведем прямую a_2, параллельную AC. На основании признака параллельности прямой и плоскости $a_2 \parallel ABC$;

3) в этом случае «готовой» плоскости нет. Ее надо построить. Для этого построим треугольник PAK. Он и задает плоскость β. Как и ранее, в плоскости PAK через точку M проведем прямую a_3, параллельную AK. На основании признака параллельности прямой и плоскости $a_3 \parallel ABC$.

Построение точки $X = a \cap PBC$. Искомые точки X_1, X_2 и X_3 строятся таким образом: $X_1 = a_1 \cap PB$, $X_2 = a_2 \cap PC$, $X_3 = a_3 \cap PK$.

23, *а.*

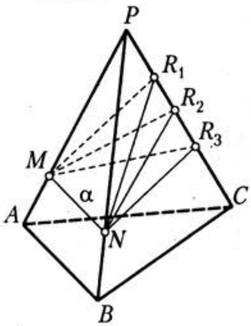


Рис. 16

Краткая запись задачи:
$PABC$ — тетраэдр, $M \in PA$.

1) Построить α: $M \in \alpha$, $\alpha \parallel AB$.
2) Сколько решений имеет задача?

Поиск решения. Искомая плоскость α должна проходить через прямую, параллельную прямой AB. В этом случае плоскость α будет параллельна AB. Поэтому в плоскости грани PAB через точку M проведем прямую $MN \parallel AB$ (рис. 16). Для построения плоскости α нужно выбрать еще произвольную точку $R \notin MN$. Удобнее точку R выбирать на ребре PC или на его продолжениях. Задача имеет бесконечное множество решений.

23, *б.*

Краткая запись задачи:
$PABC$ — тетраэдр, $M \in PA$ (рис. 17).

1) Построить α: $M \in \alpha$, $\alpha \parallel AB$, $\alpha \parallel PC$.
2) Сколько решений имеет задача?

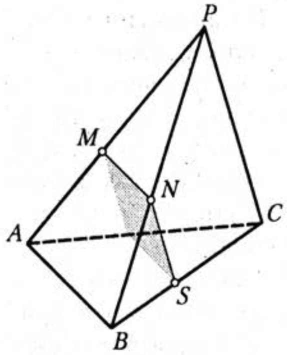


Рис. 17

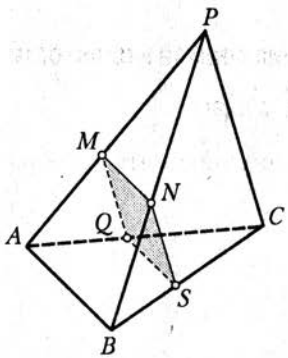


Рис. 18

Поиск решения. Учитывая задачу 23, а, в плоскости грани PAB проведем прямую MN, параллельную AB. Тогда любая плоскость, проходящая через прямую MN, будет параллельна AB. Аналогично в плоскости грани PAC проведем прямую MQ, параллельную PC. Любая плоскость, проходящая через прямую MQ, будет параллельна PC. Если теперь провести плоскость $\alpha = (MN, MQ)$, то она будет параллельна обеим прямым AB и PC. Построение искомой плоскости свелось к построению плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые MN и MQ. Такая плоскость — единственная.

Конкретизация задачи. Для уточнения расположения плоскости α относительно тетраэдра построим сечение тетраэдра этой плоскостью. Пусть плоскость α пересекает основание ABC по отрезку QS. Могут ли прямые QS и AB пересечься? Не могут, так как в противном случае пересеклись бы прямая AB и плоскость α. Следовательно, $QS \parallel AB$. Полученную точку S соединим с N. Четырехугольник $MNPQ$ — искомое сечение. Нетрудно установить, что MN и SQ параллельны AB, а MQ и NS — параллельны PC. Следовательно, $MN \parallel SQ$, $MQ \parallel NS$. Поэтому четырехугольник $MNSQ$ — параллелограмм (рис. 18).

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 25 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

25, *а*.

Краткая запись задачи:

2) $a \otimes b$, $A \notin \beta = (a, b)$ (рис. 19).

---

1) Построить α: $A \in \alpha$, $\alpha \parallel a$, $\alpha \parallel b$.

2) Сколько решений имеет задача?

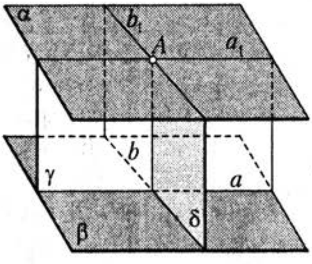


Рис. 19

Поиск решения. По аналогии с задачей 23, б через точку A проведем прямые a_1 и b_1, параллельные соответственно прямым a и b. Через прямые a_1 и b_1 проведем плоскость α. Плоскость α — искомая. Осталось уточнить, каким образом строятся прямые a_1 и b_1. Дело в том, что в пространстве прямые a_1 и b_1 мы не можем построить. Для построения прямой a_1 необходимо вначале построить некоторую плоскость γ, а потом уже в этой плоскости проводить прямую a_1. Аналогично для построения прямой b_1 также требуется вначале провести некоторую плоскость δ. Как построить эти плоскости?

Занятие 9. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 26, а; 27, а; 31, а, г из раздела «Задания для самостоятельной работы».

26, *а.*

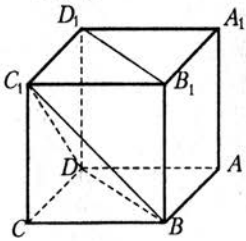


Рис. 20

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 20).

Построить α: $B \in \alpha$, $\alpha \parallel B_1D_1$, $\alpha \parallel DC_1$.

Поиск решения. Через точку B необходимо провести прямую, параллельную прямой B_1D_1. Такую прямую можно провести в плоскости нижнего основания куба.

Это прямая BD. (В самом деле, $BD \parallel B_1D_1$, так как четырехугольник BB_1D_1D — параллелограмм.) Тогда получим, что через точку D проведены прямые DB и DC_1, соответственно параллельные прямым B_1D_1 и DC_1. Поэтому плоскость BDC_1 будет искомой.

31, *а.*

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — квадрат, $O = AC \cap BD$, $OP \perp ABCD$ (рис. 21).

Построить прямые, проходящие через точки O и P и перпендикулярные прямым AB, BC, CD и AC.

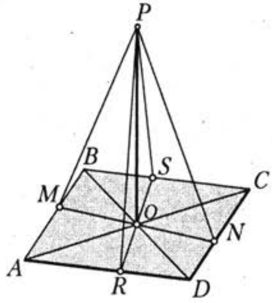


Рис. 21

Решение. Сразу можно построить искомые перпендикуляры, проходящие через точку O. Пусть M, N, R, S — середины соответственно сторон AB, CD, AD, BC (см. рис. 21). Тогда $MN \perp AB$ и $MN \perp DC$, $RS \perp AD$ и $RS \perp BC$. Кроме того, $BD \perp AC$ (как диагонали квадрата).

Перейдем теперь к построению искомых перпендикуляров, проходящих через точку P. Для этого воспользуемся теоремой о трех перпендикулярах (теорема 11.2). Проведем прямую PM. Проекцией прямой PM на плоскость $ABCD$ является прямая OM. Имеем: прямая AB, лежащая в плоскости проекций, перпендикулярна проекции OM; на основании теоремы 11.2 AB перпендикулярна наклонной PM. Итак, PM — искомый перпендикуляр к прямой AB, проходящий через точку P. Аналогично получаем, что $PN \perp CD$, $PS \perp BC$. Перпендикуляром к прямой AC, проходящим через точку P, является прямая PO.

31, *в.*

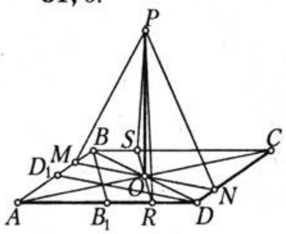


Рис. 22

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — ромб, $O = AC \cap BD$, $OP \perp ABCD$, $\angle A = 60°$ (рис. 22).

Построить прямые, проходящие через точки O и P и перпендикулярные прямым AB, BC, CD, AC.

Решение. Как и при решении задач 31, а, б, легче провести искомые перпендикуляры, проходящие через точку O. Начнем с них. Замечаем, что треугольник ABD — равносторонний. Проведем вначале перпендикуляр к AB, проходящий через точку D. Это медиана DD_1 этого треугольника. Проведем $OM \parallel DD_1$. Так как $DD_1 \perp AB$ и $OM \parallel DD_1$, то $OM \perp AB$. Пусть прямая OM пересекает сторону CD в точке N. Очевидно, что $ON \perp CD$. Аналогично строится прямая RS, перпендикулярная прямым BC и AD. После этого устанавливаем (с помощью теоремы 11.2), что $PM \perp AB$, $PN \perp CD$, $PS \perp BC$. Кроме того, $PO \perp AC$.

31, *г.*

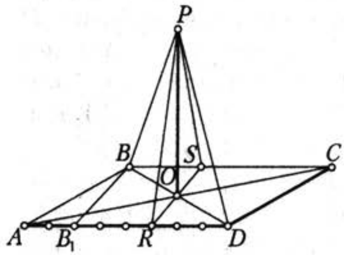


Рис. 23

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — параллелограм, $O = AC \cap BD$, $OP \perp ABCD$, $AB = 4$, $AD = 8$, $\angle A = 60°$ (рис. 23).

Построить прямые, проходящие через точки O и P и перпендикулярные прямым AB, BC, CD, AC.

Решение. Построим вначале некоторый перпендикуляр к стороне AB (не проходящий пока через точку O). Опустим такой перпендикуляр из точки D. Получим прямоугольный треугольник с углом в 30° при вершине D. Тогда катет, противолежащий этому углу, будет равен $8 : 2 = 4$, т. е. стороне AB. Поэтому $OB \perp AB$ и $OD \perp CD$. Для построения перпендикуляра к сторонам BC и AD, проходящего через точку O, вначале построим такой перпендикуляр, проходящий через точку B. Завершите решение задачи.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 31, д—з из раздела «Задания для самостоятельной работы».

31, *д.*

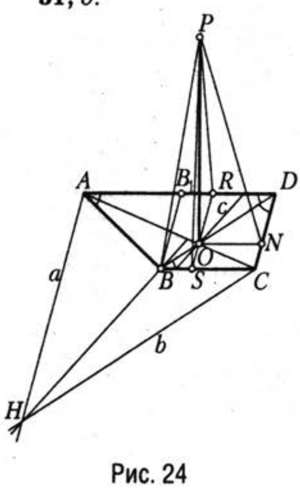


Рис. 24

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — прямоугольная трапеция, $O = AC \cap BD$, $OP \perp ABC$, $BC = 4$, $AD = 8$, $CD = 4$, $\angle C = \angle D = 90°$ (рис. 24).

Построить прямые, проходящие через точки O и P и перпендикулярные прямым AB, BC, CD, AC.

Решение. Сразу можно построить прямые, проходящие через точку O и перпендикулярные сторонам BC, AD, CD. Проведем $RS \parallel CD$, $O \in RS$. Так как $CD \perp BC$ и $CD \perp AD$, то $RS \perp BC$ и $RS \perp AD$. Проведем $ON \parallel BC$. Поскольку $BC \perp CD$, то $ON \perp CD$. Несколько сложнее додуматься до построения перпендикуляра к стороне AB, проходящего через точку O. Для этого проведем $BB_1 \perp AD$ и заметим, что $\angle BDB_1 = 45°$ и $\angle BAB_1 = 45°$. Тогда $\angle ABD = 90°$. Следовательно, $OB \perp AB$. Неочевидным является и построение прямой, проходящей через точку O перпендикулярно к диагонали AC. Построим вначале ортоцентр H ΔABC. Проведем прямую a: $A \in a$ и $a \parallel CD$. Очевидно, что $a \perp BC$. Проведем прямую b: $C \in b$, $b \parallel OB$. Получим, что $b \perp AB$. Пусть $a \cap b = H$. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда $HB \perp AC$. Осталось через точку O провести прямую $c \parallel HB$. Прямая c — искомая: $O \in c$, $c \perp AC$. Построение искомых перпендикуляров, проходящих через точку P, проводится так, как и в предыдущих задачах.

31, *е.*

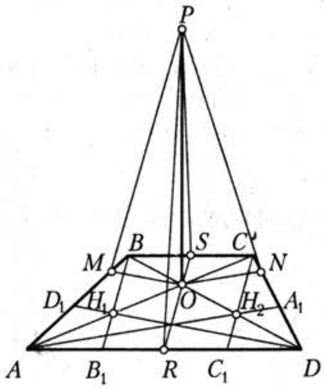


Рис. 25

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — трапеция, $O = AC \cap BD$,
$OP \perp ABCD$,
$AB = CD, AC \perp BD, \angle A = 75°$ (рис. 25).

Построить прямые, проходящие через точки O и P и перпендикулярные прямым AB, BC, CD, AC.

Решение. Прямая RS, проходящая через середины оснований равнобедренной трапеции, пройдет через точку O и будет перпендикулярна основаниям. Для проведения перпендикуляра OM к стороне AB построим высоту DD_1 треугольника ABD. Предварительно построим ортоцентр H_1 этого треугольника. Так как $AO \perp BD$, то AO — одна из высот треугольника ABD; BB_1, параллельная RS, — другая высота этого треугольника. Тогда $H_1 = AO \cap BB_1$ — ортоцентр треугольника ABD. Проведем прямую DH_1: $DH_1 \perp AB$. Осталось через точку O провести $OM \parallel DD_1$: $OM \perp AB$.

Перпендикуляр ON к CD строится аналогичным образом (рассматривается треугольник ACD, строится его ортоцентр H_2, проводится высота AA_1, после чего проводится $ON \parallel AA_1$).

По условию $BD \perp AC$. Поэтому BD — также искомый перпендикуляр, проходящий через точку O.

Построение перпендикуляров, проходящих через точку P, проводится так же, как и в предыдущих задачах.

31, *ж.*

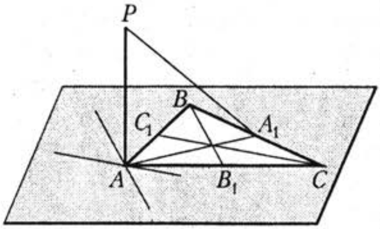


Рис. 26

Краткая запись задачи:
ΔABC – равносторонний, $AP \perp ABC$ (рис. 26).

Построить прямые, проходящие через точки A и P и перпендикулярные прямым AB, BC, AC.

Решение. Перпендикуляр из точки A на сторону BC пройдет через ее середину. Прямая, проходящая через вершину A и перпендикулярная стороне AC, будет параллельна медиане BB_1. Этим можно воспользоваться для построения искомого перпендикуляра. Аналогично проводится прямая, проходящая через точку A перпендикулярно к стороне AB. После этого проводятся перпендикуляры через точку P. Завершите решение задачи.

Занятие 10. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 31, и–м из раздела «Задания для самостоятельной работы».

31, *и.*

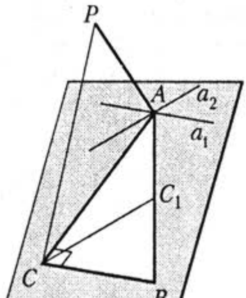


Рис. 27

Краткая запись задачи:
ΔABC, $AP \perp ABC$, $\angle C = 90°$, $AC = BC$ (рис. 27).

Построить прямые, проходящие через точки A и P и перпендикулярные прямым AC, AB, BC.

Построения:

1) прямая AC – искомый перпендикуляр к BC;

2) $a_1 \parallel BC$, $A \in a_1$, a_1 – искомый перпендикуляр к AC;

3) медиана CC_1;

4) $a_2 \parallel CC_1$, $A \in a_2$, a_2 – искомый перпендикуляр к AB;

5) прямая PA – искомый перпендикуляр к AB и AC;

6) PC – перпендикуляр к BC.

31, *к*.

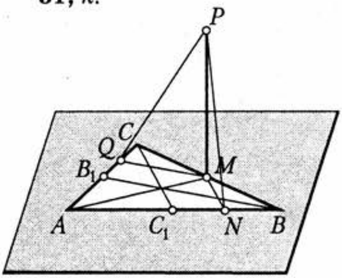


Рис. 28

Краткая запись задачи:
ΔABC — равносторонний, $MP \perp ABC$,
M — середина BC (рис. 28).

Построить прямые, проходящие через точки M и P и перпендикулярные прямым AB, BC, AC.

Построения:
1) медиана CC_1;
2) $MN \parallel CC_1$, MN — искомый перпендикуляр к AB;
3) медиана BB_1;
4) $MQ \parallel BB_1$, MQ — искомый перпендикуляр к AC;
5) прямая AM — искомый перпендикуляр к BC;
6) PN, PM, PQ — перпендикуляры соответственно к AB, BC, AC.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 31, н—о из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Занятие 11. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 32, а—г из раздела «Задания для самостоятельной работы».

32, *а*.

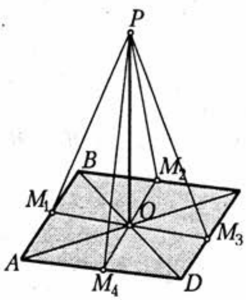


Рис. 29

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — квадрат, $O = AC \cap BD$,
$OP \perp ABCD$,
$OP = AB = a$ (рис. 29).

Найти расстояния от точки P до:
1) вершин квадрата;
2) прямых, содержащих стороны квадрата;
3) прямых, содержащих диагонали квадрата.

Построения: 1) PA, PB, PC, PD — расстояния от точки P до вершин квадрата;

2) M_1, M_2, M_3, M_4 — середины сторон квадрата;

3) PM_1, PM_2, PM_3, PM_4 — расстояния от точки P до сторон квадрата (см. задачу 31, а);

4) PO — расстояние от точки P до диагоналей квадрата.

План вычислений. 1) Так как треугольники POA, POB, POC, POD — прямоугольные и равные, то $PA = PB = PC = PD$ и PA можно найти из ΔPOA по теореме Пифагора;

2) так как треугольники POM_1, POM_2, POM_3, POM_4 — прямоугольные и равные, то $PM_1 = PM_2 = PM_3 = PM_4$ и PM_1 можно найти из ΔPOM_1 по теореме Пифагора.

32, *в.*

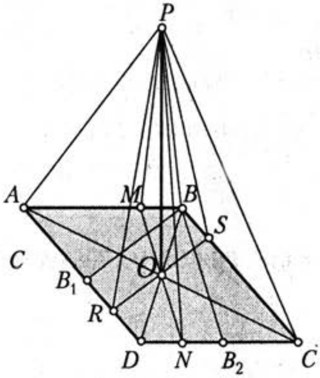


Рис. 30

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — ромб, $O = AC \cap BD$, $OP \perp ABCD$,
$OP = H$,
$AB = a$, $\angle A = 60°$ (рис. 30).

Найти расстояния от точки P до:
1) вершин ромба;
2) прямых AB, BC, CD, AD, AC и BD.

Построения: 1) PA, PB, PC, PD — расстояния от точки P до вершин ромба;

2) PM, PS, PN, PR — расстояния от точки P до прямых AB, BC, CD, DA (см. задачу 31, в);

3) PO — расстояние от точки P до прямых AC и BD.

План вычислений. Так как:

1) треугольники POA и POC — прямоугольные и равные, то $PA = PC$ и PA находится из треугольника POA по теореме Пифагора;

2) треугольники POB и POD — прямоугольные и равные, то $PB = PD$ и PB находится из треугольника POB по теореме Пифагора;

3) треугольники POM и PON — прямоугольные и равные, то $PM = PN$ и PM находится из треугольника POM по теореме Пифагора, при этом учтем, что $OM = \frac{1}{2}DD_1$ по свойству средней линии треугольника ABD (найти же DD_1 сравнительно нетрудно, DD_1 — перпендикуляр, проведенный из точки D к прямой AB);

4) треугольники POS и POR — прямоугольные и равные, то $PS = PR$ и PS найдем из треугольника POS по теореме Пифагора, воспользовавшись тем, что $OS = \frac{1}{2}SR = \frac{1}{2}BB_1$;

5) $PO \perp AC$ и $PO \perp BD$, то расстояния от точки P до прямых AC и BD находятся сразу: $PO = H$.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 32, д; 33, а—в; 34, а из раздела «Задания для самостоятельной работы».

32, *д.*

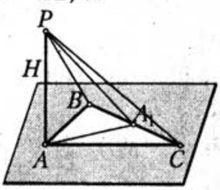


Рис. 31

Краткая запись задачи:
ΔABC — равносторонний, $AP \perp ABC$, $AP = H$, $AB = a$ (рис. 31).

Найти расстояния от точки P до:
1) вершин треугольника ABC;
2) прямых AB, BC, AC.

Построения: 1) PA, PB, PC — расстояния от точки P до вершин треугольника ABC;

2) PA — расстояние от точки P до прямых AB и AC;

3) AA_1 — медиана треугольника ABC;

4) PA_1 — расстояние от точки P до прямой BC.

План вычислений. Найдем:

1) $PA = H$ — расстояние от точки P до вершины A и до прямых AB и AC;

2) $PB = PC = \sqrt{PA^2 + AB^2}$ — из прямоугольных треугольников PAB и PAC;

3) $AA_1^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2$ — из прямоугольного треугольника ABA_1;

4) $PA_1 = \sqrt{PA^2 + AA_1^2}$ — из прямоугольного треугольника PAA_1.

33, *а.*

Краткая запись задачи:
ΔABC, $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 4$, $P \notin ABC$,
$PA = 4\sqrt{2}$, $PB = 5$, $PC = 4$ (рис. 32).

1) Провести перпендикуляр из точки P к плоскости ABC.
2) Есть ли в задаче лишнее данное?

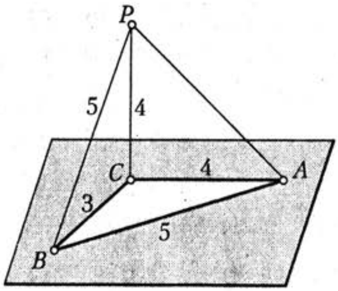


Рис. 32

Замысел решения. Обращаем внимание на тот факт, что в задаче даются стороны всех граней пирамиды. Зная стороны треугольников, можно найти их углы. Если оказалось бы, что $\angle PCA = \angle PCB = 90°$, то можно сделать вывод о том, что $PC \perp ABC$. Наличие прямых углов в треугольниках можно установить при помощи теоремы, обратной теореме Пифагора.

Решение. Имеем:

1) $PC^2 + CA^2 = 4^2 + 4^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = PA^2$. Поэтому $\angle PCA = 90°$;

2) $PC^2 + CB^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 = PB^2$. Поэтому $\angle PCB = 90°$;

3) из двух предыдущих пунктов на основании признака перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $PC \perp ABC$.

Таким образом, боковое ребро PC данной пирамиды является перпендикуляром к плоскости ABC.

Лишнее данное — $AB = 5$ (оно не использовалось при решении задачи).

33, *б.*

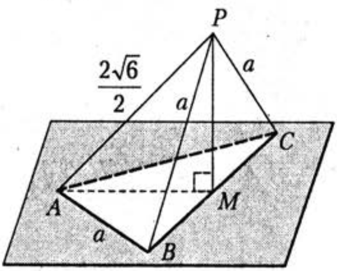


Рис. 33

Краткая запись задачи:
ΔABC — равносторонний, $P \notin ABC$,
$AB = PB = PC = a$, $PA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (рис. 33).

1) Провести перпендикуляр из точки P к плоскости ABC.
2) Есть ли в задаче лишнее данное?

Замысел решения. Нетрудно убедиться в том, что ни одно из ребер PA, PB и PC не является перпендикуляром к плоскости ABC. Не будет ли искомый перпендикуляр лежать в какой-либо боковой грани пирамиды? Может ли, например, искомый перпендикуляр PM принадлежать грани PBC? Проверим это предположение.

Решение. Проведем PM — медиану равностороннего треугольника PBC, построим отрезок AM. Так как $\Delta PBC = \Delta ABC$, то $PM = AM$. Из треугольника PMB находим: $PM^2 = AM^2 = \frac{3a^2}{4}$. Тогда

$$PM^2 + AM^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{6a^2}{4} = PA^2.$$

Поэтому $\angle PMA = 90°$. Если $PM \perp BC$ и $PM \perp AM$, то на основании признака перпендикулярности прямой и плоскости $PM \perp ABC$.

34, *а*.

Краткая запись задачи:
$\angle BAC$, $AB \subset \alpha$, AC — наклонная к плоскости α,
AC_1 — ортогональная проекция AC на плоскость α,
$\angle BAC = \varphi$, $\angle BAC_1 = \beta$, $\angle CAC_1 = \gamma$.

Найти формулу, связывающую косинусы углов φ, β и γ.

Замысел решения. Попытаемся включить углы φ, β и γ в прямоугольные треугольники и из этих треугольников выразить косинусы указанных углов. Необходимо также проверить, не будут ли зависеть рассуждения от величины угла φ. Возможно, придется рассмотреть три случая: $\varphi < 90°$, $\varphi > 90°$, $\varphi = 90°$.

Решение.

1-й случай: $\varphi < 90°$ (рис. 34, *а*). Проведем перпендикуляр CC_2 из точки C на прямую AB, соединим точки C_1 и C_2 отрезком. Имеем: $(CC_1 \perp \alpha$ и $AC_1 \subset \alpha) \Rightarrow CC_1 \perp AC_1$ — по определению прямой, перпендикулярной плоскости, поэтому ΔCC_1A — прямоугольный; CC_2 — наклонная к плоскости α, C_1C_2 — ее проекция на эту плоскость и $AB \perp CC_2$; тогда по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp C_1C_2$ и, следовательно, треугольник AC_2C_1 — прямоугольный. Итак, треугольники CC_1A, CC_2A, C_1C_2A — прямоугольные. Из треугольника CC_2A получаем: $\cos\varphi = \frac{AC_2}{AC}$; из треугольника CC_1A имеем: $\cos\beta = \frac{AC_2}{AC_1}$; из треугольника CC_1A находим: $\cos\gamma = \frac{AC_1}{AC}$. Тогда $\cos\varphi = \frac{AC_2}{AC} = \frac{AC_2}{AC_1} \cdot \frac{AC_1}{AC} = \cos\beta \cos\gamma$. Получили формулу Эйлера: $\cos\varphi = \cos\beta \cos\gamma$.

2-й случай: $\varphi > 90°$ (рис. 34, *б*). Пусть $CC_1 \perp \alpha$. Проведем перпендикуляр CC_2 из точки C на прямую AB. Так как угол BAC — тупой, то этот перпендикуляр «упадет» на продолжение луча AB за точку A. К острому углу CAC_2 применим только что выведенную формулу Эйлера:

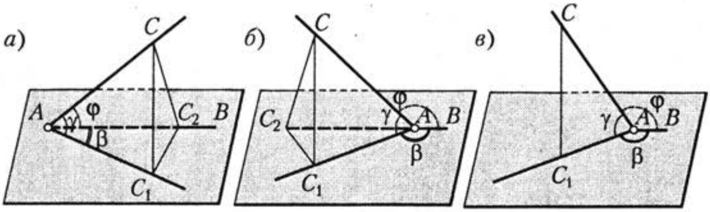


Рис. 34

$$\cos \angle CAC_2 = \cos \angle C_1AC_2 \cos \angle CAC_1 \Rightarrow \cos (180° - \varphi) =$$
$$= \cos(180° - \beta)\cos\gamma \Rightarrow -\cos\varphi = -\cos\beta \cos\gamma \Rightarrow \cos\varphi = \cos\beta \cos\gamma.$$

3-й случай: $\varphi = 90°$ (рис. 34, *в*). По условию этого случая $AB \perp AC$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах прямая AB, будучи перпендикулярной наклонной AC, будет перпендикулярна и ее проекции — прямой AC_1. Значит, если $\varphi = 90°$, то $\beta = 90°$. Имеем:

$$\cos\varphi = \cos 90° = 0 = 0 \cos\gamma = \cos\beta \cos\gamma.$$

Опять получаем, что $\cos\varphi = \cos\beta \cos\gamma$.

Таким образом, формула Эйлера справедлива для любого угла φ, данного в задаче.

Занятие 12. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 35; 36 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

35, *а.*

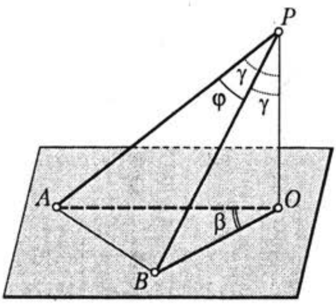


Рис. 35

Краткая запись задачи:
$P \notin \alpha$, PA, PB — наклонные к плоскости α,
$PO \perp \alpha$, $O \in \alpha$, $PA = PB$,
$\angle APB = \varphi$, $\angle AOB = \beta$, $\angle APO = \gamma$ (рис. 35).

1) Сравнить углы φ и β.
2) Нет ли в задаче лишних данных?

Замысел решения. Сравнение углов φ и β можно свести к сравнению косинусов этих углов. Нельзя ли при этом воспользоваться теоремой косинусов, применив ее к треугольникам APB и AOB? Чтобы связать между собой косинусы углов φ и β, выразим AB^2 из указанных двух треугольников.

Решение. Положим $PA = PB = a$, $OA = OB = b$. Тогда

$$AB^2 = 2a^2 - 2a^2\cos\varphi, \quad AB^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\beta.$$

Далее: $a^2(1 - \cos\varphi) = b^2(1 - \cos\beta)$, $\dfrac{1-\cos\varphi}{1-\cos\beta} = \dfrac{b^2}{a^2} < 1$,

$$1 - \cos\varphi < 1 - \cos\beta, \quad \cos\varphi > \cos\beta, \varphi < \beta.$$

Заметим, что задание величины γ оказалось лишним.

35, *б.*

Краткая запись задачи:
φ, β и γ — углы, указанные в задаче 35, а (см. рис. к задаче 35, а).

Найти связь между тригонометрическими функциями этих углов.

Замысел решения. Предыдущая задача подсказывает, что, вероятнее всего, искомую связь легче установить для косинусов углов φ и β. Нельзя ли при этом воспользоваться уже примененным приемом: дважды с помощью теоремы косинусов выразить AB^2?

Решение. Как и при решении задачи 35, а, имеем:

$$\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\beta} = \frac{b^2}{a^2} = \sin^2\gamma,\ 1 - \cos\varphi = \sin^2\gamma - \sin^2\gamma\cos\beta \Rightarrow \cos\varphi =$$

$$= 1 - \sin^2\gamma + \sin^2\gamma\cos\beta,\ \cos\varphi = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cos\beta,$$

$$\cos\beta = \frac{\cos\varphi - \cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}.$$

36, *а.*

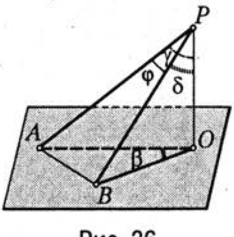


Рис. 36

Краткая запись задачи:
$P \notin \alpha$, PA и PB — наклонные к плоскости α,
PO — перпендикуляр к плоскости α,
$\angle APB = \varphi$, $\angle AOB = \beta$, $\angle APO = \gamma$,
$\angle BPO = \delta$ (рис. 36).

Доказать: $\cos\beta = \dfrac{\cos\varphi - \cos\gamma\cos\delta}{\sin\gamma\sin\delta}$.

Замысел решения. С помощью теоремы косинусов выразим дважды AB^2 из треугольников APB и AOB. Приравняв полученные выражения, составим равенство, связывающее косинусы углов β и φ.

Решение.

Пусть $PO = h$. Тогда $PA = \dfrac{h}{\cos\gamma}$, $PB = \dfrac{h}{\cos\delta}$, $OA = h\operatorname{tg}\gamma$, $OB = h\operatorname{tg}\delta$.

Выразим дважды AB^2 и приравняем полученные выражения:

$$\frac{h^2}{\cos^2\gamma}+\frac{h^2}{\cos^2\delta}-\frac{2h^2\cos\varphi}{\cos\gamma\cos\delta}=h^2\operatorname{tg}^2\gamma+h^2\operatorname{tg}^2\delta-2h^2\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta\cos\beta,$$

$$2+\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\delta-\frac{2\cos\varphi}{\cos\gamma\cos\delta}=\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\delta-2\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta\cos\beta,$$

$$\cos\beta=\frac{\cos\varphi-\cos\gamma\cos\delta}{\cos\gamma\cos\delta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}=\frac{\cos\varphi-\cos\gamma\cos\delta}{\sin\gamma\sin\delta}.$$

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 37; 38, а—в из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 39; 40 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

37, *в.*

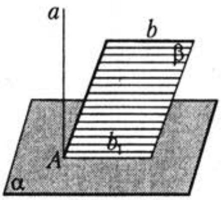


Рис. 37

Краткая запись задачи: $a \perp \alpha$, $a \perp b$ (рис. 37).
Как прямая b и плоскость α располагаются относительно друг друга?

Предположение. С помощью модели высказываем предположение о том, что прямая b параллельна плоскости α. Как обосновать это предположение?

Замысел обоснования. Нельзя ли в плоскости α построить прямую b_1, параллельную прямой b (тогда бы по признаку параллельности прямой и плоскости следовало, что $b \parallel \alpha$)?

Построения: 1) $A = a \cap \alpha$; 2) $\beta = (A, b)$; 3) $b_1 \parallel b$: $b_1 \subset \beta$, $A \in b_1$. Обратим внимание на тот факт, что прямая b_1 проводится в плоскости β. Проверим, принадлежит ли прямая b_1 плоскости α.

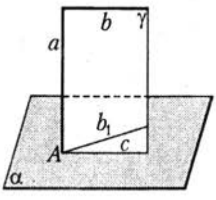


Рис. 38

Постановка вспомогательной задачи. Мы еще не пользовались перпендикулярностью прямой a и плоскости α. Обратимся к этой части условия задачи. Учтем также, что так как $a \perp b$ и $b \parallel b_1$, то $a \perp b_1$. Имеем: $a \perp \alpha$, через точку $A \in a$ проведена прямая $b_1 \perp a$. Как располагаются прямая b_1 и плоскость α? Опыт с моделью подсказывает, что $b_1 \subset \alpha$. В итоге формулируем *вспомогательную задачу*: если перпендикулярные прямая a и плоскость α пересекаются в точке A и через точку A к прямой a проведен перпендикуляр b_1, то $b_1 \subset \alpha$.

Решение вспомогательной задачи. Пусть $a \perp \alpha$, $A = a \cap \alpha$, $b_1 \perp a$, $A \in b_1$. Докажем, что $b_1 \subset \alpha$. Воспользуемся методом от противного. Допустим, что $b_1 \not\subset \alpha$ (рис. 38). Тогда плоскость $\gamma = (a, b_1)$, имея с плоскостью α общую точку A, пересечет плоскость α по некоторой прямой c. Так как $a \perp \alpha$ и $c \subset \alpha$, то $a \perp c$. Получили, что в плоскости γ к прямой a через точку A проведены две прямые b_1 и c, перпендикулярные прямой a. Это противоречит известному планиметрическому предложению о единственности перпендикуляра. Следовательно, $b_1 \subset \alpha$.

Решение основной задачи. Так как $b \parallel b_1$ (по построению) и $b_1 \subset \alpha$, то на основании признака параллельности прямой и плоскости $b \parallel \alpha$.

Примечание. Рассмотренную выше вспомогательную задачу полезно запомнить, она находит применение при решении некоторых других задач.

Занятие 13. Взаимное расположение двух плоскостей: параллельность двух плоскостей

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь соответствующим конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1; 4; 6 из п. 5.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 2; 3; 5 из п. 5.2 теоретической части пособия для учащихся.

Занятие 14. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задача 1 из п. 5.4 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 2; 3 из п. 5.4 теоретической части пособия для учащихся.

Занятие 15. Перпендикулярность двух плоскостей

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 3—5 из п. 5.6 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 1; 2 из п. 5.6 теоретической части пособия для учащихся.

Занятие 16. Взаимное расположение двух плоскостей

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 41, а—б; 42, а; 43, а из раздела «Задания для самостоятельной работы».

41, *а.*

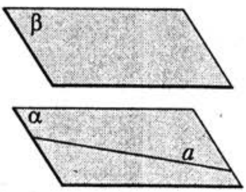


Рис. 39

Краткая запись задачи:
$\alpha \parallel \beta$, $a \subset \alpha$ (рис. 39).

$a \parallel \beta$ — ?

Предположение. Обращение к модели подсказывает, что на вопрос задачи надо дать утвердительный ответ. Как обосновать его?

Обращение к определениям. По условию $\alpha \parallel \beta$. Согласно определению двух параллельных плоскостей: $\alpha = \beta$ или эти плоскости общих точек не имеют. Поэтому рассмотрим указанные два случая отдельно.

***1-й случай*:** $\alpha = \beta$. В этом случае доказательство очевидно:

$$(\alpha = \beta, a \subset \alpha) \Rightarrow a \subset \beta; \quad a \subset \beta \Rightarrow a \parallel \beta.$$

***2-й случай*:** плоскости α и β общих точек не имеют. При этом возможны различные способы рассуждений.

а) Воспользуемся методом от противного. Допустим, что $a \otimes \beta$. К какому выводу можно прийти, сделав это допущение? В этом случае получаем, что $\alpha \otimes \beta$. А это противоречит условию. Следовательно, $a \parallel \beta$.

б) Воспользуемся прямым методом. Так как плоскости α и β не имеют общих точек, то и прямая a, лежащая в плоскости α, не будет иметь с плоскостью β общих точек. Значит, $a \parallel \beta$.

в) Параллельность прямой a и плоскости β можно попытаться доказать, опираясь на признак параллельности прямой и плоскости. В самом деле, через прямую a и точку $B \in \beta$ проведем плоскость γ. Пусть $b = \gamma \cap \beta$. По теореме 14.1 $a \parallel b$. Имеем: $(a \parallel b, b \subset \beta) \Rightarrow a \parallel \beta$.

41, *б.*

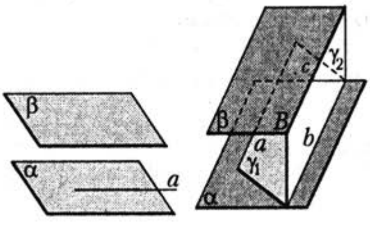


Рис. 40

Краткая запись задачи:
$a \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$ (рис. 40).

$a \parallel \beta$ — ?

Предположение. $a \parallel \beta$. Возможны различные способы обоснования этого предположения.

***1-й способ*:** методом от противного. Допустим, что a β. Тогда прямая a пересекает плоскость β. При этом на основании теоремы 14.3 прямая a пересечет и плоскость α. Это противоречит условию. Следовательно, $a \parallel \beta$.

***2-й способ*:** прямым методом с использованием признака параллельности прямой и плоскости. Нельзя ли в плоскости β построить прямую $c \parallel a$? Как при этом воспользоваться условием задачи? Через прямую a и точку $A \in \alpha$ проведем плоскость γ_1. Плоскость γ_1 пересечет плоскость α по прямой $b \parallel a$. Далее через прямую b и точку $B \in \beta$ проведем плоскость γ_2. Она пересечет плоскость β по прямой $c \parallel b$. (Почему?) Тогда на основании транзитивности параллельности прямых: $(a \parallel b, b \parallel c) \Rightarrow a \parallel c$. Окончательный вывод: $(a \parallel c, c \subset \beta) \Rightarrow a \parallel \beta$ — сделан на основании признака параллельности прямой и плоскости.

42, *а.*

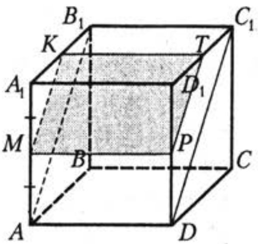


Рис. 41

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб,
M – середина ребра AA_1, $AB = a$ (рис. 41).

1) Построить сечение куба плоскостью α: $M \in \alpha$, $\alpha \parallel AB_1C_1D$.
2) $P_{сеч}$ – ? 3) $\dfrac{S_{сеч}}{S_{A_1BCD_1}}$ – ?

Анализ. Пусть плоскость α проходит через точку M и параллельна плоскости AB_1C_1D. Как построить эту плоскость? Так как $\alpha \parallel AB_1C_1D$, то плоскость AA_1B_1B пересечет эти плоскости по параллельным прямым MK и AB_1. Аналогично плоскость AA_1D_1D пересечет параллельные плоскости α и AB_1C_1D по параллельным прямым MP и AD. Точно так же плоскость $A_1B_1C_1D_1$ пересечет эти плоскости по параллельным прямым KT и B_1C_1, а плоскость DD_1C_1C – по параллельным прямым PT и DC_1. В итоге приходим к следующим построениям.

Построения: 1) $MK \parallel AB_1$; 2) $KT \parallel B_1C_1$; 3) $MP \parallel AD$; 4) PT; $MKTP$ – искомое сечение.

Установление вида сечения. Выясним вид четырехугольника $MKTP$. Так как $MP \parallel AD$ и $AD \perp AA_1B_1B$, то $MP \perp AA_1B_1B$. Если $MP \perp AA_1B_1B$ и $MK \subset AA_1B_1B$, то $MP \perp MK$.

Кроме того, очевидно, что $MKTP$ – параллелограмм. С учетом предыдущего получаем, что $MKTP$ – прямоугольник.

Вычисления. Так как $MP = a$, $MK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, то $P_{сеч} = 2a + a = a\left(2+\sqrt{2}\right)$.

Так как четырехугольник A_1BCD_1 также является прямоугольником, то

$$\frac{S_{сеч}}{S_{A_1BCD_1}} = \frac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

43, *а.*

Краткая запись задачи:
ΔABC – равнобедренный и прямоугольный, $BA = BC$,
ΔABC перегнули так, что $ABD \perp CBD$ (рис. 42).

Доказать: 1) $DA \perp DC$; 2) $\angle ABC = 60°$.

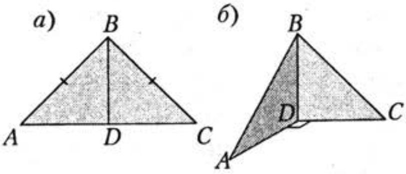


Рис. 42

Составление плана решения. В соответствии с требованиями задачи составление плана разобьем на две части.

1) Докажем, что $DA \perp DC$. В задаче говорится о том, что плоскости ABD и CBD перпендикулярны. Это означает, что они пересекаются под прямым двугранным углом. Если двугранный угол прямой, то его линейный угол также прямой. Нельзя ли этим воспользоваться? Отсюда приходим к следующему: а) рассмотрим прямой двугранный угол с ребром BD; б) найдем линейный угол этого двугранного угла; в) приходим к выводу, что этот линейный угол равен 90°; г) полученный вывод используем для доказательства перпендикулярности DA и DC.

2) Проверим, что $\angle ABC = \angle ADC$. Замечаем, что BD является перпендикуляром к плоскости ADC, а BA и BC — наклонными к этой плоскости. Поэтому угол ABC ортогонально проектируется в угол ADC. Не встречались ли нам раньше задачи, связанные с ортогональным проектированием углов? (Вспоминаем задачи 34—36.) Какой формулой при этом пользовались? (Обобщенной формулой Эйлера.)

В итоге приходим к следующему: а) записываем обобщенную формулу Эйлера; б) приводим обозначения углов в соответствие с обозначениями формулы Эйлера ($\angle ABC = \varphi$, $\angle ADC = \beta = 90°$, $\angle ABD = \angle CBD = \gamma = \delta = 45°$); в) выполним подстановку в формулу данных величин, находим $\cos \varphi$, затем φ.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 41, в—д; 42, б; 43, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 41—43 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач две на выбор).

41, *в.*

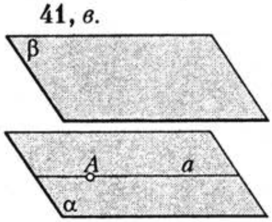


Рис. 43

Краткая запись задачи:
$\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $A \in a$, $a \parallel \beta$ (рис. 43).

Как располагается прямая a относительно плоскости α?

Предположение. Высказываем предположение о том, что прямая a принадлежит плоскости α. Как обосновать это предположение?

***1-й способ*:** воспользуемся результатом задачи 41, а. На основании доказанного в этой задаче получаем, что $a \parallel \alpha$. Если $a \parallel \alpha$ и прямая a и плоскость α имеют общую точку A, то $a \subset \alpha$ (следствие 1 из § 4.1).

***2-й способ*:** методом от противного. Допустим, что $a \not\subset \alpha$.

Тогда $(a \otimes \alpha, \alpha \parallel \beta) \Rightarrow a \otimes \beta$ — по теореме 14.3.

Это противоречит условию: $a \parallel \beta$.

Следовательно, $a \subset \alpha$.

41, *г.*

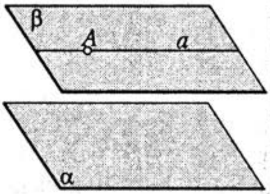


Рис. 44

Краткая запись задачи:

α и A — данные плоскость и точка,

β — плоскость, проходящая через точку A и параллельная плоскости α,

a — произвольная прямая, проходящая через точку A и параллельная плоскости α (рис. 44).

Доказать: $a \subset \beta$.

Замысел решения. Не встречалась ли нам аналогичная задача? Такая же ситуация имела место в предыдущей задаче, поэтому сразу можно сделать вывод о том, что $a \subset \beta$. Таким образом, все прямые, указанные в условии данной задачи, принадлежат плоскости β.

41, *е.*

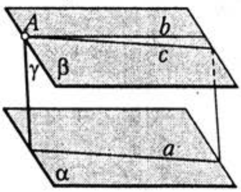


Рис. 45

Краткая запись задачи:

$\alpha \parallel \beta$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ (рис. 45).

Как располагаются прямые a и b относительно друг друга?

Замысел решения. Ответ, очевидно, зависит от того, совпадают плоскости α и β или они различны. Если плоскости α и β совпадают, то прямые a и b оказываются лежащими в одной плоскости, а потому они либо пересекаются, либо параллельны. Остается рассмотреть случай, когда α и β — две различные параллельные плоскости. Высказываем предположение: в этом случае прямые a и b либо параллельны, либо скрещиваются. Как доказать это предположение?

Обоснование. Пусть a – произвольная прямая, принадлежащая плоскости α, b – произвольная прямая, принадлежащая плоскости β. Через прямую a и точку $A \in b$ проведем плоскость γ. Пусть плоскость γ пересечет плоскость β по прямой c. По теореме 14.1 $c \parallel a$. Возможны два случая: а) прямая c совпадает с прямой b; б) прямая c пересекает прямую b. В первом случае приходим к выводу: $b \parallel a$. Во втором случае имеем: прямая b пересекает плоскость γ в точке A, прямая a принадлежит плоскости γ, причем точка A не принадлежит прямой a. На основании признака скрещивающихся прямых $b \dot{-} a$. Так как все возможные случаи рассмотрены, то в отношении прямых a и b можно сделать вывод: они либо параллельны, либо скрещиваются. Объединяя оба случая параллельности плоскостей α и β, приходим к общему выводу: прямые a и b могут пересекаться, быть параллельными или скрещивающимися.

43, *б.*

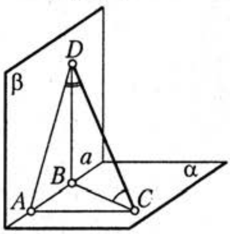


Рис. 46

Краткая запись задачи:
$\alpha \perp \beta$, $a = \alpha \cap \beta$,
$A \in a$, $B \in a$, $AC \subset \alpha$, $AC \perp a$,
$BD \subset \beta$, $BD \perp a$, $AB = 6$, $AC = 3$, $BD = 2$ (рис. 46).

Найти: 1) CD;
2) косинусы углов, образуемых прямой CD с плоскостями α и β.

Составление плана решения в соответствии с требованиями задачи разобьем на две части.

1) Выясним, как можно найти CD. Для этого выполним следующие поисковые действия: а) попробуем включить отрезок CD в треугольник – желательно прямоугольный с возможно большим числом данных (это могут быть треугольники CAD и CBD); б) выбираем треугольник CBD; в) доказываем, что он является прямоугольным; г) находим катет BC треугольника CBD, привлекая для этого другой прямоугольный треугольник BAC; д) находим CD как гипотенузу треугольника CDB, зная оба его катета.

2) Построим угол между прямой CD и плоскостью α. Для этого необходимо из точки D на плоскость α провести перпендикуляр, затем построить проекцию CD на плоскость α. Угол между прямой CD и ее проекцией на плоскость α и будет углом между прямой CD и плоско-

стью α. Для этого выполняем следующие поисковые действия: а) выясняем, не будет ли DB искомым перпендикуляром, проведенным из точки D к плоскости α; б) тогда CB является проекцией CD на плоскость α; в) устанавливаем, что угол DCB — искомый; г) находим косинус угла DCB.

Аналогично устанавливаем, что угол CDA — угол между прямой CD и плоскостью β. Находим косинус этого угла.

43, *в.*

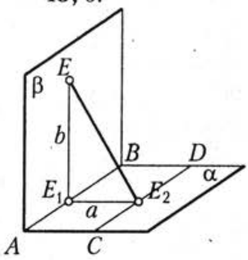


Рис. 47

Краткая запись задачи:
$\alpha \perp \beta$, $AB = \alpha \cap \beta$,
$CD \subset \alpha$ и $CD \parallel AB$,
a — расстояние между AB и CD;
$E \in \beta$, b — расстояние от точки E до прямой AB (рис. 47).

Найти расстояние от точки E до прямой CD.

Составление плана решения. 1) Начинаем с выполнения рисунка, удовлетворяющего условию задачи. При этом выполняем следующие действия:

а) строим перпендикулярные плоскости α и β, AB — линию их пересечения, проводим в плоскости α отрезок $CD \parallel AB$ и выбираем точку $E \in \beta$;

б) из точки E проводим перпендикуляр EE_1 к прямой AB;

в) из точки E проводим перпендикуляр EE_2 к прямой CD (длину этого перпендикуляра надо найти);

г) необходимо построить треугольник, в котором отрезок EE_2 был бы стороной (для этого проводим отрезок E_1E_2; в результате получаем треугольник EE_1E_2).

2) Устанавливаем вид ΔEE_1E_2.

Предположение. Этот треугольник является прямоугольным с прямым углом E_1. Для проверки этого предположения достаточно доказать, что $EE_1 \perp \alpha$ (при этом, вероятнее всего, необходимо учесть, что $\alpha \perp \beta$ и $EE_1 \perp AB$).

3) Находим неизвестные стороны треугольника EE_1E_2. Катет EE_1 известен, он равен b. Для нахождения гипотенузы EE_2 достаточно найти второй катет E_1E_2 (при этом учтем, что мы еще не пользовались перпендикулярностью EE_2 и CD, параллельностью CD и AB, расстоянием a между параллельными прямыми CD и AB).

43, *г.*

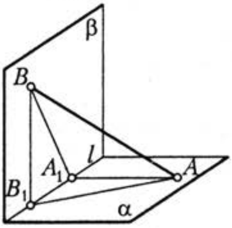


Рис. 48

Краткая запись задачи:
$\alpha \perp \beta$, $l = \alpha \cap \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$,
$AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$,
$AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ (рис. 48).

Найти: 1) AB;
2) проекции отрезка AB на плоскости α и β.

Составление плана решения. Выполняем рисунок, обращаем внимание учащихся на связь данной задачи с задачами 43, б—в. Поисковые действия могут быть следующими:

1) как и в двух предыдущих задачах, получаем, что $AA_1 \perp \beta$, $BB_1 \perp \alpha$;

2) строим проекции отрезка AB на плоскости α и β — отрезки AB_1 и BA_1 соответственно;

3) выбираем треугольник, с помощью которого будем находить отрезок AB (например, треугольник ABB_1);

4) устанавливаем вид этого треугольника;

5) находим неизвестный катет треугольника ABB_1;

6) находим отрезок AB как гипотенузу треугольника ABB_1;

7) заметим, что одну из проекций — AB_1 — мы уже нашли;

8) находим проекцию отрезка AB на плоскость β — отрезок BA_1 (из прямоугольного треугольника ABA_1).

Занятие 17. Расстояние

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 3; 4 из п. 6.4 и 3; 4 из п. 6.6 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Задачи 1; 2 из п. 6.4 и 1; 2 из п. 6.6 теоретической части пособия для учащихся.

Занятие 18. Расстояние

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 44—46 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

44, *2.*

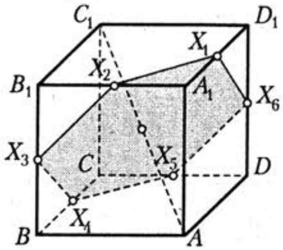


Рис. 49

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 49).

На поверхности куба найти множество точек, равноудаленных от точек A и C_1.

Отыскание точек подбором. Выбираем на ребрах куба некоторые точки и проверяем, равноудалены ли они от точек A и C_1. Так находятся точки X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, которые равноудалены от точек A и C_1.

Обоснование. Воспользуемся следующим фактом: если каждый из концов отрезка равноудален от двух данных точек, то все точки этого отрезка равноудалены от двух данных точек. На основании этого факта приходим к выводу о том, что все точки, лежащие на сторонах многоугольника $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$, равноудалены от точек A и C_1. Следовательно, искомым множеством точек является шестиугольник $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$.

Решение. Возьмем середину отрезка AC_1 — точку O — и рассмотрим треугольники AOX_1 и C_1OX_1, AOX_2 и C_1OX_2, AOX_3 и C_1OX_3 ... . Эти треугольники равны по трем сторонам. Из их равенства следует, что $\angle AOX_1 = \angle C_1OX_1 = 90°$, $\angle AOX_2 = \angle C_1OX_2 = 90°$, ... Это означает, что прямые OX_1, OX_2, OX_3, ..., проходя через точку O, перпендикулярны прямой AC_1. На основании результата задачи 40, а все эти прямые лежат в плоскости α, проходящей через точку O и перпендикулярной AC_1. Таким образом, мы не только доказали, что многоугольник $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ является плоским, но и установили, что его плоскость проходит через середину отрезка AC_1 и перпендикулярна этому отрезку.

46, *а.*

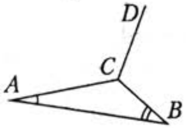


Рис. 50

Краткая запись задачи:
ΔABC, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$,
CD — наклонная к плоскости ABC,
$CD \perp AC$ (рис. 50).

Доказать: CB — проекция CD на плоскость ABC.

Решение приведем в виде таблицы.

Утверждения	На основании
1) Так как $\angle A = 30°$ и $\angle B = 60°$, то $\angle B = 90°$;	• теоремы о сумме углов треугольника;
2) следовательно, $CB \perp CA$;	• определения перпендикулярных прямых;
3) так как прямая AC перпендикулярна к наклонной CD, то AC будет перпендикулярна и к проекции наклонной CD на плоскость ABC;	• теоремы 11.1 о трех перпендикулярах;
4) имеем: $CB \perp CA$ и проекция CD также перпендикулярна к CA, следовательно, CB совпадает с проекцией наклонной CD на плоскость ABC;	• п. 2, 3 и теоремы о единственности перпендикуляра, известной из планиметрии;
5) вывод: CB является проекцией CD на плоскость ABC.	• п. 4.

46, *б.*

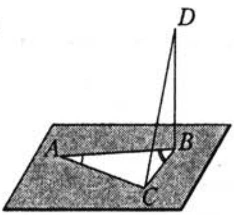


Рис. 51

Краткая запись задачи:
ΔABC, $BD \perp ABC$,
$\angle A = 30°$,
$\angle B = 60°$ (рис. 51).

Доказать: $CD \perp AC$.

Решение.

Утверждения	На основании
1) Как и в задаче 46, а, находим, что $CB \perp CA$;	• п. 1—2 предыдущей задачи;
2) так как $BD \perp ABC$ и $C \in ABC$, то CB — проекция наклонной CD на плоскость ABC;	• определения проекции фигуры и следствия из § 4.3;
3) поскольку AC перпендикулярна проекции CB, то AC перпендикулярна и самой наклонной CD;	• теоремы 11.2 о трех перпендикулярах;
4) вывод: $CD \perp AC$.	• п. 3.

46, *в.*

Краткая запись задачи:
ΔABC, $\angle C = 90°$, $BD \perp ABC$, $AC = a$, $CB = b$, $BD = c$ (см. рис. к задаче 46, б).

AD — ?

Решение.

Утверждения	На основании
1) $AB^2 = AC^2 + BC^2 = a^2 + b^2$;	• теоремы Пифагора (из ΔABC);
2) $(BD \perp ABC$ и $AB \subset ABC) \Rightarrow BD \perp AB$;	• определения прямой, перпендикулярной плоскости;
3) ΔABD — прямоугольный;	• п. 2;
4) $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.	• теоремы Пифагора (из ΔABD).

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 47 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

47, *а.*

Краткая запись задачи:
$AO \perp \alpha$, $AO = H$, AC и AB — наклонные к α, 45° — угол между наклонной AC и α, 30° — угол между наклонной AB и α, $\angle CAB = 90°$ (рис. 52).

CB — ?

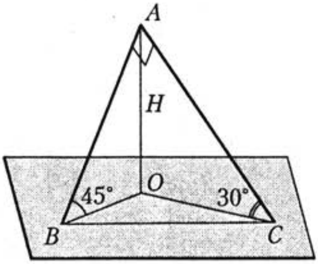


Рис. 52

Решение. Покажем решения в виде следующей логико-структурной схемы (рис. 53):

Рис. 53

47, *б.*

Краткая запись задачи:
$AO \perp \alpha$, $AO = H$, AC и AB — наклонные к α,
$45°$ — угол между наклонной AC и α,
$30°$ — угол между наклонной AB и α,
$CB = H\sqrt{6}$ (рис. 54).

$\angle CAB$ — ?

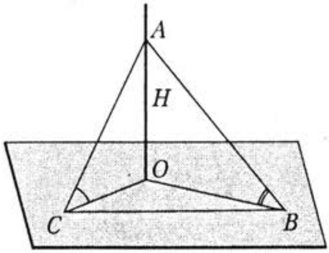


Рис. 54

Решение. Решение покажем в виде следующей логико-структурной схемы (рис. 55):

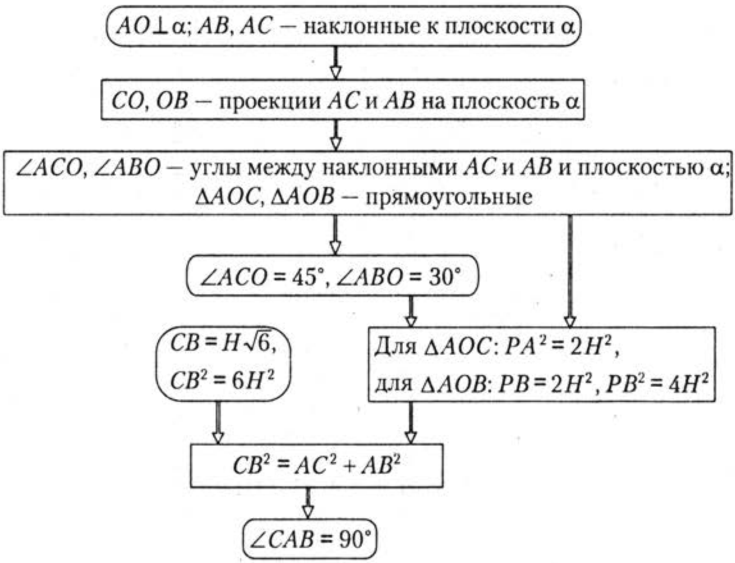


Рис. 55

47, *в.*

Краткая запись задачи:
$AO \perp \alpha$, $AO = H$, AC и AB — наклонные к α,
$45°$ — угол между наклонной AC и α,
$\angle CAB = 90°$, $CB = H\sqrt{6}$ (рис. 56).

$\angle ABO$ — ?

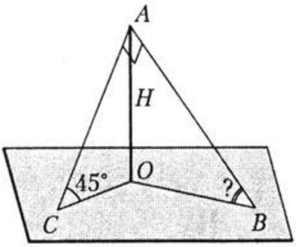


Рис. 56

Решение. Решение покажем в виде следующей логико-структурной схемы (рис. 57):

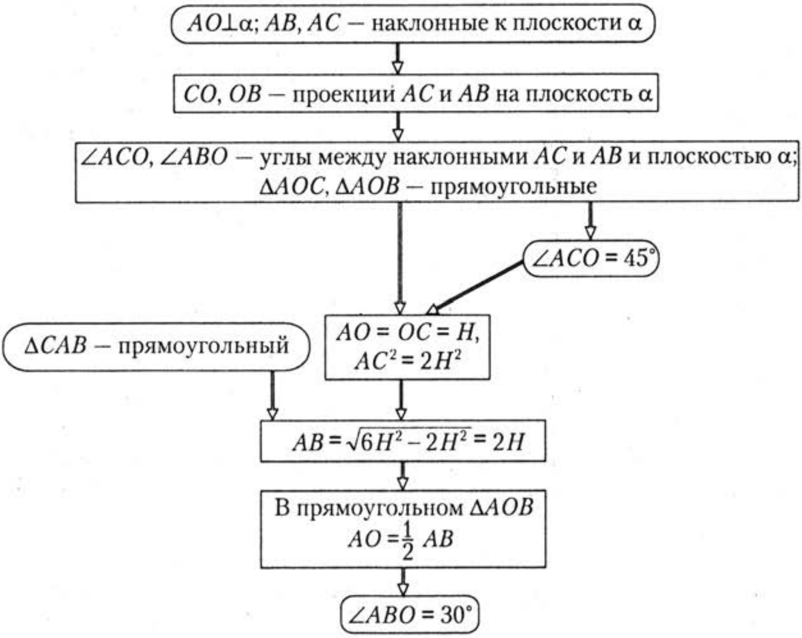


Рис. 57

Занятие 19. Расстояние

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 48—50 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

50, *б.*

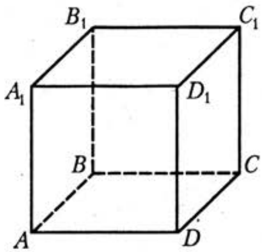


Рис. 58

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис. 58).

Построить общий перпендикуляр, пересекающий скрещивающиеся прямые AA_1 и DC.

Непосредственное обнаружение искомого перпендикуляра. Обращаемся к рисунку и выясняем, нельзя ли этот перпендикуляр найти в «готовом» виде. Замечаем, что AD является общим перпендикуляром, пересекающим прямые AA_1 и DC.

Построение искомого перпендикуляра с помощью общего алгоритма. В целях закрепления навыков применения алгоритма построения общего перпендикуляра, пересекающего две данные скрещивающиеся прямые, выполним следующие построения:

1) проведем через прямую AB плоскость AA_1B_1B, параллельную другой скрещивающейся прямой – прямой DC;

2) ортогонально спроектируем на плоскость AA_1B_1B некоторую точку прямой DC – точку C; получим точку B;

3) через точку B в плоскости AA_1B_1B проведем прямую BA, параллельную DC;

4) построим точку пересечения прямой BA с прямой AA_1 – точку A;

5) через точку A проведем прямую AD, параллельную BC; прямая AD является искомым общим перпендикуляром к прямым AA_1 и DC, пересекающим эти прямые.

Примечание. Прямая BA, которую построили в п. 2) и 3), является ортогональной проекцией прямой DC на плоскость AA_1B_1B. При этом мы прибегли к построению проекции только одной точки прямой DC на плоскость AA_1B_1B (проекции точки C). В некоторых случаях это оказывается более удобным.

50, *в.* Составьте и решите аналогичные задачи для тетраэдра.

Приведем пример такой задачи:

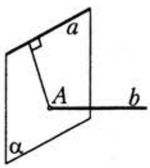


Рис. 59

Краткая запись задачи:
$PABC$ – тетраэдр, ΔABC – правильный, $PA = PB = PC$ (рис. 59).

Построить общий перпендикуляр, пересекающий прямые PA и BC.

Замысел решения. Не всегда оказывается удобным применение общего алгоритма построения перпендикуляра к двум данным скрещивающимся прямым. В ряде случаев (когда $a \perp b$) оказывается сравнительно простым построение плоскости, проходящей через одну из скрещивающихся прямых и перпендикулярной ко второй прямой. Пусть, например, плоскость α проходит через прямую a и перпендикулярна ко второй из скрещивающихся прямых — прямой b. Тогда очевидно, что перпендикуляр, проведенный из точки $A = \alpha \cap b$ к прямой a, будет искомым. (Убедитесь в этом и примените указанный прием при решении данной задачи.)

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Задачи 51, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Занятие 20. Расстояние

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 51, в; 52; 53, а из раздела «Задания для самостоятельной работы».

52, *а.*

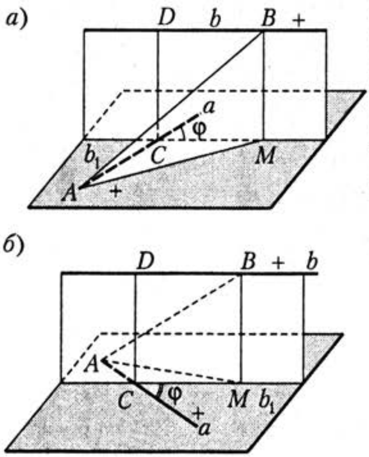


Рис. 60

Краткая запись задачи:
$a \dot{-} b$, CD — общий перпендикуляр к a и b, $C, A \in a$, $D, B \in b$, $DC = AC = BD = d$, $AB = 2d$.

Найти угол между прямыми a и b.

Выполнение рисунка. Пусть CD — общий перпендикуляр, пересекающий данные скрещивающиеся прямые a и b. Откладывать отрезок $CA = d$ на прямой a можно как по одну сторону от точки C, так и по другую (рис. 60, *а*, *б*). Аналогично на прямой b можно отложить отрезок $DB = d$ по разные стороны от точки D. Значит, при решении задачи необходимо рассматривать два случая. Один раз точки A и B выберем так, чтобы они принадлежали положительным полуосям, другой раз — полуосям разных знаков.

Для построения угла между скрещивающимися прямыми a и b через точку C проведем прямую b_1, параллельную прямой b. Угол между прямыми a и b_1 — искомый угол между данными прямыми a и b. Обозначим его буквой φ. Заметим, что $\varphi \leqslant 90°$.

Замысел решения. Для нахождения угла φ необходимо его или смежный с ним угол включить в некоторый треугольник. Для этого проведем $BM \parallel DC$, $M \in b_1$. Точку M соединим отрезком с точкой A. Тем самым построили треугольник ACM. Углом между прямыми a и b может оказаться либо угол ACM, либо смежный с ним угол.

Дальнейший поиск решения. Для нахождения угла ACM можно воспользоваться теоремой косинусов, применяя ее к треугольнику ACM. Предварительно нужно найти сторону AM этого треугольника. Как ее найти? Введем в рассмотрение плоскость $\alpha = (a, b_1)$. Очевидно, что прямые DC и BM перпендикулярны этой плоскости. Поэтому целесообразно обратиться к треугольнику BMA, так как он — прямоугольный с известной гипотенузой $AB = 2d$ и катетом $BM = d$. Катет MA находим из этого треугольника по теореме Пифагора.

Структурированная запись решения:

1) $(CD \perp b$ и $b_1 \parallel b) \Rightarrow CD \perp b_1$;

2) $(CD \perp a, CD \perp b_1) \Rightarrow CD \perp \alpha = (a, b_1)$;

3) $(CD \perp \alpha, BM \parallel CD) \Rightarrow BM \perp \alpha$;

4) $(BM \perp \alpha, AM \subset \alpha) \Rightarrow BM \perp AM$;

5) по теореме Пифагора из треугольника ABM имеем:

$$MA^2 = AB^2 - BM^2 = (2d)^2 - d^2 = 3d^2;$$

6) по теореме косинусов из треугольника ACM имеем:

$$MA^2 = CA^2 + CM^2 - 2CA \cdot CM \cos \angle ACM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3d^2 = 2d^2 - 2d^2 \cos \angle ACM \Rightarrow \cos \angle ACM = -\frac{1}{2};$$

отсюда $\angle ACM = \frac{2\pi}{3}$;

7) поэтому $\varphi = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

Данные рассуждения сохраняются и во втором случае и приводят к этому же значению угла φ.

Примечание. Иногда прямые рассматриваются как направленные. В зависимости от выбора направления на прямых a и b получатся два ответа: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. Предположение соответствует определению угла между двумя скрещивающимися прямыми.

52, *б.*

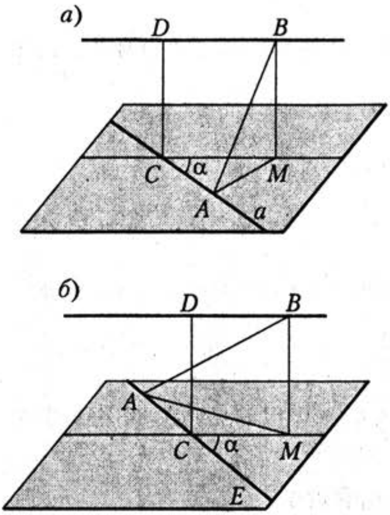


Рис. 61

Краткая запись задачи:
$a \dot{-} b$, α — угол между прямыми a и b,
CD — общий перпендикуляр к a и b,
$C, A \in a, D, B \in b, AB = m, AC = BD = l$.

CD — ?

Выполнение рисунка. Замечаем, что в данной задаче геометрическая ситуация такая же, как и в предыдущей. Необходимо рассмотреть два возможных случая в откладывании равных отрезков AC и BD (рис. 61). Для определенности положим, что угол между данными скрещивающимися прямыми a и b есть угол MCE: $\angle MCE = \alpha$.

Замысел решения. Нахождение отрезка CD сведем к нахождению равного ему отрезка BM.

Вычисления. ***1-й случай*** (рис. 61, *а*). Из треугольника ACM по теореме косинусов находим $AM^2 = 2l^2 - 2l^2 \cos \alpha$. Из прямоугольного треугольника ABM по теореме Пифагора получаем:

$$BM = \sqrt{m^2 - 2l^2(1 - \cos\alpha)} = \sqrt{m^2 - 2l^2 \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{m^2 - 4l^2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

2-й случай (рис. 61, *б*). В этом случае имеем:

$$AM^2 = 2l^2 - 2l^2\cos(180° - \alpha) = 2l^2 + 2l^2\cos\alpha =$$
$$= 2l^2(1 + \cos\alpha) = 2l^2 \cdot 2\cos^2\tfrac{\alpha}{2} = 4l^2\cos^2\tfrac{\alpha}{2};$$

$$BM = \sqrt{m^2 - 4l^2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$CD = BM = \sqrt{m^2 - 4l^2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Задачи 53, б—г из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Занятие 21. Многогранный угол

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Рекомендуется воспользоваться конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1; 2 и 5 из п. 7.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 3; 4 из п. 7.2 теоретической части пособия для учащихся.
Индивидуальное задание: задачи 8; 9 из п. 7.2 теоретической части пособия для учащихся.

Занятие 22. Многогранный угол

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 54; 55 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

54, *а.*

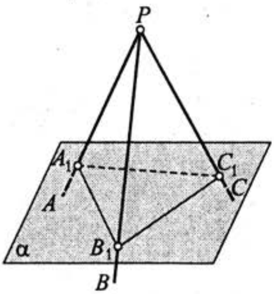


Рис. 62

Краткая запись задачи:
$PABC$ — трехгранный угол,
$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$ (рис. 62).

Можно ли угол $PABC$ пересечь плоскостью α так, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник?

Решение. На ребрах трехгранного угла от его вершины P отложим равные отрезки $PA_1 = PB_1 = PC_1$. Точки A_1, B_1 и C_1 соединим отрезками, получим треугольник $A_1B_1C_1$. Выясним, не будет ли этот треугольник равносторонним. Так как треугольники PA_1B_1, PB_1C_1 и PC_1A_1 равны по двум сторонам и углу между ними, то $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$. Значит, плоскость $\alpha = A_1B_1C_1$ пересекает данный трехгранный угол так, что в сечении получился равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$. Поэтому на вопрос задачи следует дать утвердительный ответ.

54, *б.*

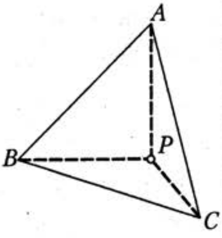


Рис. 63

Краткая запись задачи:
$PABC$ — трехгранный угол,
$\angle APB = \angle APC = 90°$,
$\angle BPC = 120°$ (рис. 63).

Можно ли угол $PABC$ пересечь плоскостью α так, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник?

Поиск решения. Допустим, что треугольник ABC — равносторонний. Пусть $PA = a$, $PB = b$. Из равенства прямоугольных треугольников APB и APC следует, что $PC = PB = b$. Тогда по теореме косинусов из треугольника BPC можно выразить BC и выяснить, возможно ли при некотором соотношении между b и a равенство сторон AB, AC и BC.

Вычисления. Из прямоугольного треугольника APB по теореме Пифагора получаем, что $AB^2 = a^2 + b^2$. Из треугольника BPC по теореме косинусов находим $BC^2 = b^2 + b^2 - 2b^2\cos 120° = 3b^2$. Для проверки возможности равенства $AB = BC$ приравняем квадраты этих отрезков: $a^2 + b^2 = 3b^2$. Отсюда $a = b\sqrt{2}$. Итак, если b задать произвольно, а a положить равным $b\sqrt{2}$, то $AB = AC = BC = b\sqrt{3}$. Следовательно, требуемое сечение возможно.

Примечание. Из-за произвольного выбора отрезка PA_1 в задачах 54, а, б искомых сечений можно провести сколько угодно.

54, *в.*

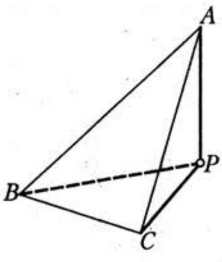


Рис. 64

Краткая запись задачи:
$PABC$ — трехгранный угол,
$\angle APB = \angle APC = 90°$,
$\angle BPC = 60°$ (рис. 64).

Можно ли угол $PABC$ пересечь плоскостью α так, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник?

Замысел решения. Воспользуемся приемом решения предыдущей задачи. Положим $PB = b$, $PA = a$ и выясним, возможно ли некоторое соотношение между a и b, при котором $AB = BC = CA$. Обратим внимание на тот факт, что искомая плоскость α должна пересекать все три ребра данного трехгранного угла (плоскости граней при этом мы исключаем).

Вычисления. Находим: $AB^2 = AC^2 = a^2 + b^2$, $BC^2 = 2b^2 - 2b^2\cos 60° = b^2$.

Для проверки возможности равенств $AB = BC = CA$ приравняем найденные квадраты AB и BC: $a^2 + b^2 = b^2$. Отсюда $a = 0$. В этом случае точка A совпадает с вершиной угла — точкой P. Плоскость α окажется совпавшей с плоскостью грани BPC. Следовательно, плоскости, которая пересекает все три ребра данного трехгранного угла, в данном случае не существует.

54, *г.*

Краткая запись задачи:
$PABC$ — трехгранный угол, $\angle APB = \angle APC = 90°$,
$\angle BPC = 45°$ (см. рис. к задаче 54, в).

Можно ли угол $PABC$ пересечь плоскостью α так, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник?

Решение. Находим: $AB^2 = AC^2 = a^2 + b^2$, $BC^2 = 2b^2 - \sqrt{2}b^2$. Для проверки возможности равенств $AB = BC = CA$ приравняем AB^2 и BC^2:

$$a^2 + b^2 = 2b^2 - \sqrt{2}b^2.$$

Отсюда $a^2 = b^2 - \sqrt{2}b^2 = b^2(1 - \sqrt{2}) < 0$, что невозможно.

Следовательно, в данном случае трехгранный угол нельзя пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник.

55, *б.*

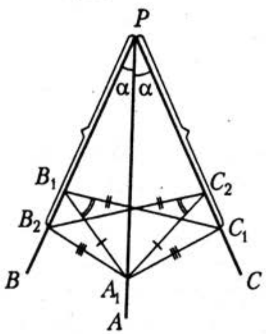


Рис. 65

Краткая запись задачи:
$PABC$ — трехгранный угол,
$\angle APB = \angle APC$,
$\angle A_1B_1C_1$ — линейный угол двугранного угла с ребром PB,
$\angle A_1C_2B_2$ — линейный угол двугранного угла с ребром PC (рис. 65).

Доказать: $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1C_2B_2$.

Обратим внимание на то, что угол $A_1B_1C_1$ можно рассматривать как ортогональную проекцию угла A_1PC_1. Поэтому возникает предположение об использовании обобщенной формулы Эйлера (см. задачу 36, а). В самом деле:

$$\cos \angle A_1B_1C_1 = \frac{\cos \angle A_1PB_2 - \cos \angle B_1PA_1 \cos \angle B_1PC_1}{\sin \angle B_1PA_1 \sin \angle B_1PC_1};$$

$$\cos \angle A_1C_2B_2 = \frac{\cos \angle A_1PB_2 - \cos \angle C_2PA_1 \cos \angle C_2PB_2}{\sin \angle C_2PA_1 \sin \angle C_2PB_2}.$$

Так как $\angle A_1PC_1 = \angle A_1PB_2$, $\angle B_1PA_1 = \angle C_2PA_1$ (по условию), $\angle B_1PC_1 = \angle C_2PB_2$ (имеем дело с одним углом, по-разному обозначенным), то правые части записанных равенств равны. Поэтому

$$\cos \angle A_1B_1C_1 = \cos \angle A_1C_2B_2 \Rightarrow \angle A_1B_1C_1 = \angle A_1C_2B_2.$$

55, *в.*

Краткая запись задачи:
PABC — трехгранный угол, $\angle APB = \angle APC = 90°$ (см. рис. к задаче 55, б),
$\angle A_1B_1C_1$ — линейный угол двугранного угла с ребром *PB*,
$\angle A_1C_2B_2$ — линейный угол двугранного угла с ребром *PC*.

Доказать: $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1C_2B_2 = 90°$.

Замысел решения. Эта задача является конкретизацией предыдущей. Для ее решения воспользуемся обобщенной формулой Эйлера. Так как $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PA_1 = 90°$, то $\cos \angle A_1PC_1 = \cos \angle B_1PA_1 = 0$. Поэтому $\cos \angle A_1B_1C_1 = 0$, $\cos \angle A_1C_2B_2 = 0$. Отсюда $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1C_2B_2 = 90°$.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Задачи 56; 57 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

56, *а.*

Краткая запись задачи:
PABC — трехгранный угол.

Найти геометрическое место точек, расположенных внутри угла и равноудаленных от его граней.

Вспомогательная задача. Пусть дан двугранный угол *MPAN* (рис. 66, *б*). Полуплоскость *QPA* с границей *PA*, делящая двугранный угол на два равных угла *MPAQ* и *QPAN*, называется *биссекторной полуплоскостью* двугранного угла *MPAN*. Докажите, что биссекторная по-а)

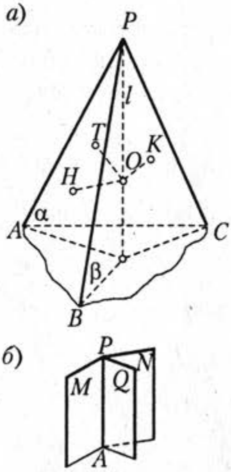


Рис. 66

лупплоскость двугранного угла является геометрическим местом его внутренних точек, равноудаленных от граней данного двугранного угла. (Докажите самостоятельно.)

Решение основной задачи. Пусть α – биссекторная полуплоскость двугранного угла с ребром PA (см. рис. 66, *а*), β – биссекторная полуплоскость двугранного угла с ребром PB, $l = \alpha \cap \beta$. Рассмотрим часть прямой l, расположенную внутри трехгранного угла, – луч PO. Пусть $OH \perp PAB$, $OT \perp PAC$, $OK \perp PBC$. Докажем, что $OH = OT = OK$. Эти равенства действительно имеют место в силу свойства точек биссекторных полуплоскостей α и β. Если же некоторая точка X не лежит на луче PO, то она не будет принадлежать либо биссекторной полуплоскости α, либо биссекторной полуплоскости β, а значит, не будет равноудалена даже от двух каких-либо граней трехгранного угла. Значит, точки луча PO представляют собой геометрическое место точек, расположенных внутри трехгранного угла и равноудаленных от его граней. Заметим, что луч PO называется *биссектрисой трехгранного угла $PABC$*.

56, *б.*

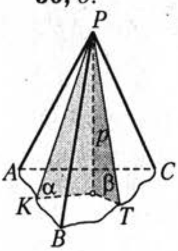


Рис. 67

Краткая запись задачи:
$PABC$ – трехгранный угол (рис. 67).

Найти геометрическое место точек, расположенных внутри угла и равноудаленных от его ребер.

Замысел решения. Сразу можно найти точки грани APB, равноудаленные от ребер PA и PB (рис. 67). Эти точки образуют биссектрису угла APB – луч PK. Пусть теперь α – плоскость, проходящая через PK и перпендикулярная грани APB. Нетрудно установить, что точки этой плоскости равноудалены от ребер PA и PB. Аналогично можно рассмотреть биссектрису PT угла BPC и плоскость β, проходящую через эту биссектрису и перпендикулярную грани BPC. Пусть $p = \alpha \cap \beta$. Можно высказать предположение о том, что точки прямой p, расположенные внутри трехгранного угла, представляют собой искомое геометрическое место точек. Как обосновать это предположение?

Тема 2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

Занятие 23. Воображаемые (условные) построения

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 4; 5 из п. 8.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 58 из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 59; 60 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

59, *а.*

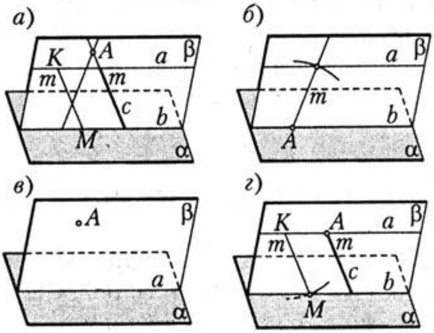


Рис. 68

Краткая запись задачи:
A, $a \parallel \alpha$, m – заданная длина отрезка.

Провести через точку A прямую c так, чтобы ее отрезок, заключенный между a и α, имел длину m.

Анализ. Допустим, что искомая прямая c (рис. 68, *а*) построена: она проходит через точку A и отрезок ее, заключенный между прямой a и плоскостью α, равен m. Какими свойствами обладает прямая c, которыми можно было бы воспользоваться при ее построении? Замечаем, что искомая прямая c должна лежать в плоскости $\beta = (a, A)$. Так как плоскость β проходит через прямую a, параллельную плоскости α, то линия пересечения плоскостей α и β – прямая b – параллельна a. Поэтому отрезок прямой c заданной длины m должен высекаться на прямой c двумя параллельными прямыми a и b. Задача свелась к планиметрической: в плоскости β даны точка A и две параллельные прямые a и b; требуется через точку

A провести прямую c таким образом, чтобы отрезок этой прямой, заключенный между прямыми a и b, имел заданную длину m. Для этого вначале построим некоторый отрезок $KM = m$, концы которого лежат на прямых a и b; затем через точку A проведем прямую c параллельно KM.

Построения: 1) $\beta = (a, A)$; 2) $b = \alpha \cap \beta$; 3) $K \in a$; 4) окружность (K, m); 5) $M = (K, m) \cap b$; 6) KM; 7) $c \parallel KM$, $A \in c$. Прямая c — искомая.

Доказательство можно предложить учащимся провести самостоятельно.

Исследование. 1) а) Пусть плоскость β точкой A и прямой a задается единственным образом ($A \notin a$ и $\beta \otimes \alpha$). Ответ зависит от числа общих точек у окружности (K, m) и прямой b. При $m = h$ задача имеет одно решение, при $m > h$ — два, при $m < h$ — решений нет (h — расстояние между параллельными прямыми a и b);

б) если $A \in a$, $a \not\subset \alpha$ (рис. 68, *б*), то также приходим к трем возможностям, аналогичным предыдущим;

в) если $A \notin a$, $a \subset \alpha$ (рис. 68, *в*), то, учитывая, что $m > 0$, приходим к выводу об отсутствии решения;

г) если $A \notin a$, $a \not\subset \alpha$ (рис. 68, *г*), то задача может не иметь решения (в этом случае расстояние между прямой a и плоскостью α больше m), иметь одно решение (при условии, что расстояние между прямой a и плоскостью α равно m), иметь бесконечное множество решений (в этом случае расстояние между прямой a и плоскостью α меньше m). Менее очевиден последний подслучай: необходимо заметить, что можно провести бесконечное множество плоскостей β, в каждой из которых найдется искомая прямая c.

2) а) Если плоскости β и α окажутся различными параллельными плоскостями, то задача не имеет решения;

б) если плоскости β и α совпадают, то любая прямая c, проходящая через точку A и пересекающая плоскость α, либо скрещивается с прямой a, либо пересекает ее в точке A. В этих случаях решения нет.

59, *б*.

Краткая запись задачи: $a \otimes \alpha$, $O \notin a$, $O \notin \alpha$ (рис. 69).
Провести через точку O прямую XO так, чтобы ее отрезок XY, заключенный между a и α, делился точкой O пополам.

Анализ. Допустим, что искомая прямая XY построена: она проходит через данную точку O и ее отрезок XY, заключенный между прямой

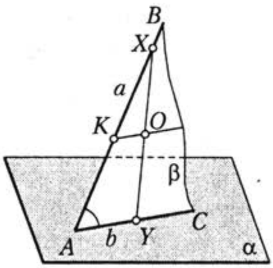


Рис. 69

a и плоскостью α, в точке O делится пополам. Какими свойствами обладает искомая прямая XY? Прежде всего, в какой плоскости она располагается? Замечаем, что прямая XY должна принадлежать плоскости $\beta = (a, O)$. Плоскости α и β, имея общую точку, пересекутся по некоторой прямой b. Искомая прямая, пересекая плоскость α, пересечет прямую b в точке Y. Задача свелась к планиметрической: в плоскости β дан угол BAC и точка O, не принадлежащая сторонам этого угла; требуется через точку O провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, делился точкой O пополам. Для решения этой задачи достаточно через точку O провести прямую $OK \parallel AC$, от полученной точки K на луче KB отложить отрезок $KX = AK$. Прямая XO — искомая.

Построения: 1) $\beta = (a, O)$; 2) $AC = \alpha \cap \beta$; 3) $OK \parallel AC$; 4) $K = OK \cap AB$; 5) $KX = AK$; 6) XO — искомая прямая.

Доказательство. Исходя из построений, получаем, что OK — средняя линия треугольника AXY, а значит, $XO = YO$.

Исследование. Построение плоскости β возможно всегда, причем единственным образом. Соответствующая планиметрическая задача, решаемая в плоскости, всегда имеет единственное решение. Поэтому данная задача всегда имеет решение и оно — единственное.

59, *г.*

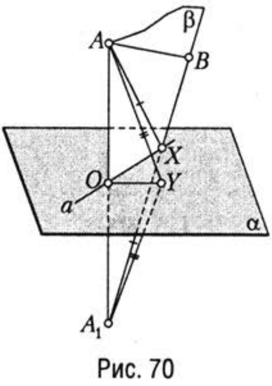


Рис. 70

Краткая запись задачи:
$A \notin \alpha$, $B \notin \alpha$, A и B лежат по одну сторону от α.

Построить на плоскости α точку X такую, чтобы сумма $AX + XB$ оказалась наименьшей.

Анализ. Допустим, что искомая точка $X \in \alpha$ построена и для нее выполняется требование: сумма $AX + XB$ является наименьшей (рис. 70). Выясним, какими свойствами обладает точка X. Обратим внимание на аналогию с планиметрической задачей: в плоскости по одну сторону от прямой a находятся точки A и B; требуется на прямой a найти точку X такую, что сумма $AX + XB$ оказывается наименьшей.

Попытаемся включить отрезки AX и XB (или равные им отрезки) в некоторый треугольник. Как и при решении планиметрической задачи, проведем $AA_1 \perp \alpha$ и отложим отрезок OA_1, равный OA (O — точка пересечения прямой AA_1 и плоскости α). Из равенства прямоугольных треугольников AOX и A_1OX следует, что $AX = A_1X$. Неравенство треугольника (применяем его к треугольнику A_1XB) подсказывает, что сумма $AX + XB$ будет наименьшей, если треугольник «выродится» в отрезок, т. е. точка X окажется лежащей на отрезке A_1B. Отсюда точка X находится как точка пересечения отрезка A_1B с плоскостью α.

Осталось уточнить, как можно построить точку пересечения отрезка A_1B и плоскости α. Для этого достаточно точку X построить как точку пересечения отрезка A_1B с прямой $a = A_1AB \cap \alpha$.

Построения: 1) $AA_1 \perp \alpha$; 2) $OA_1 = OA$; 3) A_1AB; 4) $a = A_1AB \cap \alpha$; 5) $X = A_1B \cap a$. Точка X — искомая (см. рис. 70).

Доказательство. Допустим, что в плоскости α для точки $Y \neq X$ сумма $AY + YB$ меньше суммы $AX + XB$. Рассмотрим треугольник A_1YB. На основании неравенства треугольника $A_1Y + YB > A_1B$. Отсюда, учитывая, что $A_1Y = AY$, $AX + XB = A_1X + XB$, получаем $AY + YB > AX + XB$. Значит, для построенной точки X сумма $AX + XB$ является наименьшей.

Исследование. Указанные построения выполнимы всегда и приводят к единственному результату. Поэтому задача всегда имеет единственное решение.

Занятие 24. Параллельная проекция

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 9.2 теоретической части пособия для учащихся.
Задачи 61, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».

61, *а.*

Краткая запись задачи:
ΔABC — проекция равнобедренного $\Delta A'B'C'$,
AC и AB — проекции его равных сторон, $M' \in A'B$ (рис. 71).

Построить проекцию перпендикуляра, проведенного из точки M' на $B'C'$.

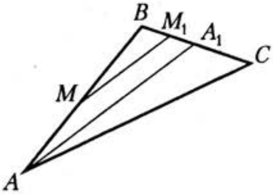


Рис. 71

Решение. Пусть треугольник ABC является проекцией равнобедренного треугольника $A'B'C'$, $A'B' = A'C'$. Точка $M' \in A'B'$. Проведем вначале некоторые рассуждения, связанные с оригиналом — треугольником $A'B'C'$. Перпендикуляр из точки M' к $B'C'$ можно провести таким образом: вначале провести высоту $A'A_1'$ (она является одновременно и медианой треугольника $A'B'C'$), затем через точку M' провести прямую $M'M_1'$ параллельно $A'A_1'$. Прямая $M'M_1'$ перпендикулярна $B'C'$. Медиана треугольника при параллельном проектировании переходит в медиану. Параллельность прямых при этом проектировании также сохраняется. Поэтому если на проекции построим медиану AA_1 треугольника ABC, а затем через точку M проведем прямую MM_1 параллельно AA_1, то MM_1 будет искомой проекцией перпендикуляра, проведенного из точки M к стороне BC.

Примечание. Обычно рисунок, представляющий фигуру-оригинал без искажения, не приводят. Чаще обращение к оригиналу проводят мысленно. Необходимые построения проводятся сразу в плоскости проекций на фигуре, являющейся проекцией фигуры-оригинала.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 5—7 из теоретической части пособия для учащихся.
Индивидуальное задание: задачи 61, в, г из раздела «Задания для самостоятельной работы».

61, *г.*

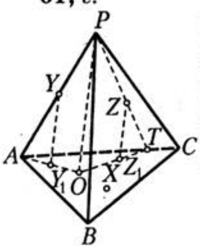


Рис. 72

Краткая запись задачи: $PABC$ — изображение пирамиды, PO — ее высота (рис. 72).
Является ли это изображение полным?

Решение. Для ответа на вопрос задачи необходимо выяснить, можно ли для каждой точки данной пирамиды построить ее проекцию на некоторую плоскость, принятую в качестве основной. Примем за основную плоскость (плоскость проекций) плоскость ABC, за направление проектирования — направление PO. Если точка X лежит в плоскости ABC, то ее проекцией будет она сама. Если точка Y принадлежит боковому ребру (например, $Y \in PA$), то проекция точки Y будет лежать на отрезке OA, являющемся проекцией ребра PA. Для построения точки Y_1 достаточно провести прямую YY_1 параллельно PO. $Y_1 = YY_1 \cap OA$ — проекция точки Y в указанном направлении. Если точка Z лежит на грани (например, $Z \in PAC$), то в этой грани проводим отрезок PT, проходящий через точку Z, строим отрезок OT, который является проекцией отрезка PT, проводим $ZZ_1 \| PO$ и получаем точку $Z_1 = ZZ_1 \cap OT$ — проекцию точки Z на плоскость ABC в направлении проектирования PO. Для завершения рассуждений необходимо взять еще внутреннюю точку пирамиды и убедиться, что для нее также можно построить проекцию на плоскость ABC в направлении PO (выполните это самостоятельно).

Занятие 25. Изображение фигуры. Построение изображений плоских фигур

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из п. 10.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 62 из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 63 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

62, *а*.

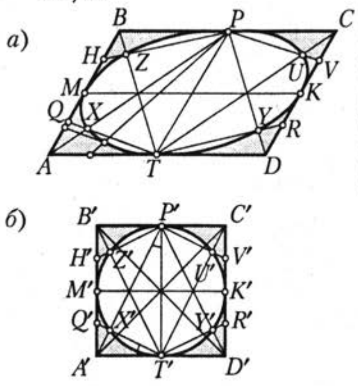


Рис. 73

Краткая запись задачи:
Параллелограмм $ABCD$ — проекция квадрата (рис. 73).

Построить проекцию окружности, вписанной в квадрат.

Решение. Обратимся к оригиналу (рис. 73, *б*). Пусть в квадрат $A'B'C'D'$ вписана окружность. Точки касания окружности и квадрата являются серединами сторон квадрата. Поэтому их проекции находятся как середины соответствующих сторон параллелограмма $ABCD$ (рис. 73, *а*). Итак, четыре точки M, K, P и T искомого эллипса найдены. Построим еще четыре его точки. Для этого заметим, что сравнительно просто построить проекцию точки X', которая получается при пересечении отрезка $A'P'$ с окружностью. Проведем луч $T'X'$, пересекающий сторону квадрата в точке Q'. Наглядно видно, что Q' — середина отрезка $A'M'$. Убедимся в этом. Для этого рассмотрим треугольники $T'X'A'$ и $P'T'A'$. Они прямоугольные (угол $T'X'A'$ — прямой, так как прямым является угол $T'X'P'$ — в силу того, что этот угол вписанный и опирается на диаметр окружности). В отмеченных треугольниках угол A' является общим. Следовательно, другие острые углы этих треугольников также равны: $\angle A'T'X' = \angle T'P'A'$. Тогда прямоугольные треугольники $T'P'A'$ и $A'T'Q'$, имея равные острые углы $T'P'A'$ и $A'T'Q'$, подобны. Из их подобия следует, что если в одном из них (в треугольнике $T'P'A'$) катет $T'A'$ в 2 раза меньше катета $T'P'$, то и в другом (в треугольнике $A'T'Q'$) катет $A'Q'$ будет в 2 раза меньше катета $A'T'$, а значит, отрезок $A'Q'$ оказывается в 2 раза меньше отрезка $A'M'$. Поэтому точка Q' является серединой отрезка $A'M'$. После этого на проекции строим точку Q — проекцию точки Q' — как середину отрезка AM, проводим отрезки AP и TQ, при пересечении этих отрезков получаем точку X — проекцию точки X'.

Аналогично строятся еще три точки Y, Z и U искомого эллипса. В итоге получаем восемь точек эллипса, по которым от руки или с помощью лекал достаточно точно строится проекция окружности, вписанной в квадрат.

62, *д*.

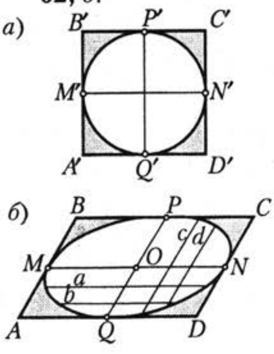


Рис. 74

Краткая запись задачи: Дан оригинал: окружность и описанный около нее квадрат (рис. 74, *а*); дан эллипс — изображение данной окружности (рис. 74, *б*).	
Построить изображение квадрата.	

Решение. Обратимся к оригиналу (см. рис. 74, *а*): на нем стороны $A'B'$ и $C'D'$ параллельны диаметру $P'Q'$, а стороны $B'C'$ и $A'D'$ параллельны диаметру $M'N'$. Поэтому решение задачи сводится к построению двух сопряженных диаметров эллипса. Для этого проводим две параллельные хорды a и b эллипса, через их середины проводим диаметр PQ. Строим теперь две хорды c и d, параллельные диаметру PQ, и через их середины проводим сопряженный диаметр MN.

Через точки M и N проводим прямые, параллельные диаметру PQ, а через точки P и Q — прямые, параллельные диаметру MN. При пересечении эти прямые образуют параллелограмм $ABCD$, который является изображением квадрата, описанного около данной окружности.

63, *в*.

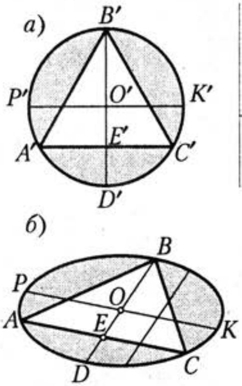


Рис. 75

Краткая запись задачи:

Дан оригинал: окружность и вписанный в нее правильный треугольник.

Построить изображение данной комбинации фигур.

Решение. Обратимся к оригиналу (рис. 75, *а*): диаметры $B'D'$ и $P'K'$ перпендикулярны, сторона правильного треугольника — сторона $A'C'$ — параллельна диаметру $P'K'$ и проходит через середину радиуса $O'D'$. Перенесем эти свойства оригинала на изображение. Строим некоторый эллипс (рис. 75, *б*), его диаметр BD, центр O, диаметр PK, сопряженный с BD, точку E — середину радиуса OD. Через точку E проводим прямую, параллельную диаметру PK, эта прямая, пересекаясь с эллипсом, дает точки A и C. После этого строим треугольник ABC. В итоге построено изображение указанной комбинации фигур.

63, *г*.

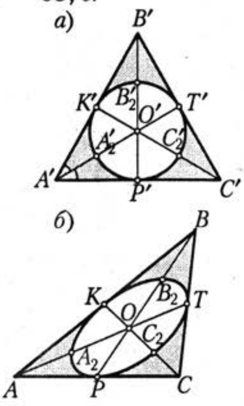


Рис. 76

Краткая запись задачи:

Дан оригинал: правильный треугольник и вписанная в него окружность (рис. 76, *а*).

Построить изображение данной комбинации фигур.

Решение. Обратимся к оригиналу (рис. 76, *а*): точки касания являются серединами сторон треугольника $A'B'C'$. Центр O' вписанной окружности совпадает с центроидом треугольник $A'B'C'$, т. е. является точкой пересечения медиан этого треугольника. Точки A'_2, B'_2, C'_2 являются серединами соответственно отрезков $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$. Перенесем обнаруженные свойства оригинала на изображение. Строим некоторый треугольник ABC — изображение треугольника $A'B'C$, медианы ΔABC — отрезки AA_1, BB_1, CC_1, точку пересечения медиан — точку O, середины отрезков OA, OB и OC — соответственно точки A_2, B_2 и C_2 (рис. 76, *б*). Получили шесть точек, принадлежащих эллипсу: точки P, K, T, A_2, B_2, C_2. По этим точкам от руки или с помощью лекал проводим эллипс. В итоге построено изображение данной комбинации фигур.

Занятие 26. Изображение пространственных фигур

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуемся конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1; 2 из п. 11.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 64, а—в из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 64, г—и; 65 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

Занятие 27. Построения на изображениях

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из п. 12.1 теоретической части пособия для учащихся.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Задачи 1—4 из п. 12.2 теоретической части пособия для учащихся.

Занятие 28. Построения на изображениях

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из п. 12.3 теоретической части пособия для учащихся.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 5—7 из п. 12.3 теоретической части пособия для учащихся.

Тема 3 КООРДИНАТНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ МЕТОДЫ В СТЕРЕОМЕТРИИ

Занятие 29. Координаты точки и вектора. Расстояние между двумя точками. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуемся конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1; 2 из п. 13.5 теоретической части пособия для учащихся.
Задачи 67, б; 68, в, г; 69, а из раздела «Задания для самостоятельной работы».

67, *б.*

Краткая запись задачи:
$Oxyz$ — прямоугольная система координат,
M лежит на биссекторе угла, образованного плоскостями xOz и xOy;
$OM = 2$, $M(\sqrt{2}; y; z)$,
$y > 0$, $z > 0$.

y — ? z — ?

Выполнение и анализ рисунка. Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную к оси Ox. Пусть эта плоскость пересекает ось x в точке M_x. Тогда $OM_x = \sqrt{2}$. Треугольник OMM_x — прямоугольный с прямым углом OM_xM. В этом треугольнике известны гипотенуза $OM = 2$ и катет $OM_x = \sqrt{2}$. Можно найти второй катет MM_x. Проведем перпендикуляры из точки M на плоскости xOy и xOz — MM_1 и MM_2. Так как точка M лежит на биссекторе угла с ребром x, то $MM_1 = MM_2$. Кроме того, отрезки MM_1, MM_2, MM_x лежат в одной плоскости. (Почему?) Тогда четырехугольник $MM_1M_xM_2$ является квадратом. Зная MM_x, можно найти его стороны MM_1 и M_1M_x. Осталось теперь обнаружить, что $M_1M_x = y$, $MM_1 = z$.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 70, а; 71, а; 72, а; 73, а; 74, а; 75, а из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 70—75 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач три на выбор).

71, *а.*

Краткая запись задачи:
$A(1; 2; 3)$, $\overrightarrow{AB}(-2; 4; 3)$, $B(x; y; z)$.

x — ? y — ? z — ?

Решение. По определению координаты вектора: $x - 1 = -2$, $y - 2 = 4$, $z - 3 = 3$.

Отсюда $x = -1$, $y = z = 6$. Итак, $B(-1; 6; 6)$.

74, *а.*

Краткая запись задачи:
$O(0; 0; 0)$, $A(2; 3; z)$, $OA = \sqrt{13}$.

z — ?

Решение. Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками, заданными своими координатами: $OA^2 = (2 - 0)^2 + (3 - 0)^2 + (z - 0)^2 = 13$. Отсюда $z^2 = 0$, $z = 0$.

75, *а.*

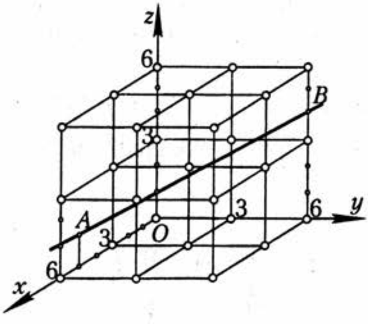


Рис. 77

Краткая запись задачи:
$A(5; 0; 1)$, $B(0; 6; 4)$ (рис. 77).

1) Построить на координатной сетке прямую AB.
2) Записать уравнения прямой AB.

Решение. 1) Строим координатную сетку, точки A и B с указанными координатами, прямую AB;

2) составляем уравнения прямой AB. Так как $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$, $z_2 \neq z_1$, то искомые уравнения имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставляя координаты точек A и B, получаем уравнения прямой AB:

$$\frac{x-5}{-5}=\frac{y}{6}=\frac{z-1}{3}.$$

75, *б.*

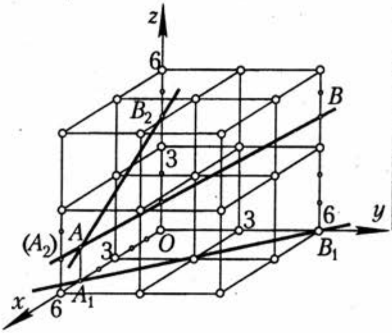


Рис. 78

Краткая запись задачи:
Условия задачи 75, а (рис. 78).

1) Построить ортогональные проекции прямой AB на координатные плоскости.
2) Записать их уравнения.

Решение. 1) Заметим, что при ортогональном проектировании точек A и B на плоскость xOy первые две координаты точек A и B остаются неизменными; при ортогональном проектировании точек A и B на плоскость xOz неизменными остаются первые и третьи координаты; при ортогональном проектировании точек A и B на плоскость yOz неизменными будут вторые и третьи координаты. Пусть A_1 и B_1 — ортогональные проекции точек A и B на плоскость xOy, A_2 и B_2 — ортогональные проекции точек A и B на плоскость xOz и A_3, B_3 — ортогональные проекции точек A и B на плоскость yOz. Тогда эти точки имеют следующие координаты:

$A_1(5; 0; 0)$, $B_1(0; 6; 0)$, $A_2(5; 0; 1)$, $B_2(0; 0; 4)$, $A_3(0; 0; 1)$, $B_3(0; 6; 4)$;

2) прямая A_1B_1 параллельна плоскости xOy. Поэтому ее уравнения:

$$\frac{x-5}{-5}=\frac{y}{6}, \quad z=0;$$

3) аналогично записываются уравнения прямых A_2B_2 и A_3B_3:

$$\frac{x-5}{-5}=\frac{z-1}{3}, y=0; \ \frac{y}{6}=\frac{z-1}{3}, x=0.$$

Занятие 30. Равные векторы. Сложение и вычитание векторов

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1; 2 из п. 14.4 теоретической части пособия для учащихся.
Задачи 81—84 (номера с буквой «а») из раздела «Задания для самостоятельной работы».

84, *а.*

Краткая запись задачи:
$\vec{a}(1; n; n)$, $\vec{b}(1; \sqrt{2}; n)$.

1) При каком n выполняется равенство $|\vec{a}| = |\vec{b}|$?

2) Возможно ли, что $\vec{a} = \vec{b}$?

3) Всегда ли $\vec{a} = \vec{b}$?

Решение. 1) Для нахождения искомого значения n выразим длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и приравняем их:

$$|\vec{a}|^2 = 1 + 2n^2, \ |\vec{b}|^2 = 1 + 2 + n^2, \ 1 + 2n^2 = 3 + n^2, \ n = \pm\sqrt{2}.$$

Так, при $n = \pm\sqrt{2}$ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

2) при $n = \sqrt{2}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковые координаты и, значит, $\vec{a} = \vec{b}$;

3) при $n \neq \sqrt{2}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют различные координаты и, значит, $\vec{a} \neq \vec{b}$.

Поэтому на вопрос третьего задания следует дать отрицательный ответ.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 81—86 (номера с буквой «б») из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 81—86 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач две на выбор).

86, *а.*

Краткая запись задачи:
$PABC$ — тетраэдр.

Доказать: $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AC}$.

Замысел решения. Не всегда векторное равенство удобно доказывать с помощью координат или геометрических построений. Данное равенство проще доказать алгебраическим способом, преобразовывая его к равенству, справедливость которого очевидна или установлена ранее.

Вспомогательная задача. Как и для векторов на плоскости, в пространстве имеет место следующее утверждение:

«Пусть дано равенство, в обеих частях которого записаны некоторые векторные суммы. Если из одной части равенства перенесем какое-либо слагаемое с противоположным знаком в другую часть, то получим равенство, которое с исходным имеет одинаковое значение истинности, т. е. является верным, если верным является исходное равенство, и ложным, если ложным является исходное равенство». (Докажите самостоятельно.)

Например, если верно равенство $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{p}+\vec{e}$, то верно и такое равенство: $\vec{a}+\vec{b}-\vec{p}=\vec{e}-\vec{c}$; если же первое равенство ложно, то ложно и второе равенство.

86, *б.*

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — параллелограмм,
O — произвольная точка пространства.

---

1) Доказать: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.
2) Справедливо ли аналогичное равенство в планиметрии?

Замысел решения. Выясним, нельзя ли, как и при решении предыдущей задачи, данное равенство путем алгебраических преобразований свести к очевидному.

Решение. Выполним преобразования, показанные на схеме (рис. 79).

Равенство $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ для параллелограмма $ABCD$ справедливо. Следовательно, справедливо и доказываемое равенство. Проведенные рассуждения не зависят от расположения точки O. Она может находиться, в частности, и в плоскости данного параллелограмма. Поэтому равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ справедливо в планиметрии.

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$$
$$\Updownarrow$$
$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$$
$$\Updownarrow$$
$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$$

Рис. 79

Занятие 31. Умножение вектора на число. Разложение вектора по базисным векторам

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—6 из п. 15.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 87—96 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (четыре задачи на выбор).
Индивидуальное задание: задачи 87—96 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (дополнительно две задачи на выбор).

87, *б.*

Краткая запись задачи:
$\vec{b} = k\vec{a}$, $\vec{a}(4; 2; 3)$, $\vec{b}(2; 1; 1{,}5)$.

k — ?

Решение. Перепишем равенство $\vec{b} = k\vec{a}$ в координатах: $k\vec{a}(4k; 2k; 3k)$, $\vec{b}(4k; 2k; 3k)$, $4k = 2$, $2k = 1$, $3k = 1{,}5$.

Полученные числовые равенства выполняются при $k = 0{,}5$. Это означает, что для данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равенство $\vec{b} = k\vec{a}$ выполняется при $k = 0{,}5$.

Заметим, что данная задача может быть решена устно.

90, *а.*

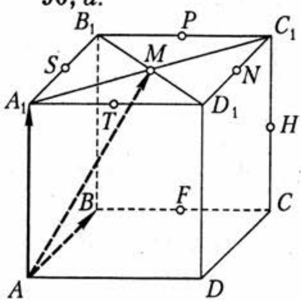


Рис. 80

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 80).

Разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ векторы: 1) $\overrightarrow{AC_1}$; 2) $\overrightarrow{AB_1}$.

Решение.

1) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$;

2) $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

91, *а*.

Краткая запись задачи:
$A(1; 0; 1)$, $B(3; 3; 0)$, $C(9; 12; -5)$.

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$?

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(2; 3; -1)$, $\overrightarrow{AB}(8; 12; -6)$. Отсюда видно, что координаты вектора $\overrightarrow{AC}$ нельзя получить из координат вектора $\overrightarrow{AB}$ умножением на одно и то же число. Поэтому $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$.

Занятие 32. Скалярное произведение двух векторов

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из п. 16.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 97—99 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (четыре задачи на выбор).
Индивидуальное задание: задачи 97—99 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (дополнительно две задачи на выбор).

97, *а*.

Краткая запись задачи:
Условия задачи 90, а, $AB = 2$.

Найти скалярное произведение векторов:
1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AM}$.

Замысел решения. 1) Если нетрудно найти длины векторов и косинус угла между ними, то скалярное произведение этих векторов легче вычислить по формуле $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$; 2) данные векторы можно разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$. Тогда их скалярное произведение можно выразить через скалярные произведения векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ (включая скалярные квадраты этих векторов).

Решение.

1) Воспользуемся первым замыслом решения:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi = 2\sqrt{2} \cdot 2 \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4;$$

2) воспользуемся вторым замыслом решения:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} +$$

$$+ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 2 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 = 4.$$

Занятие 33. Уравнения плоскости и сферы

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 17.3 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 100—105 (номера с буквой «а») из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 100—105 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач три на выбор).

100, *а.*

Краткая запись задачи:
$O \in \alpha$, $\alpha \perp \vec{n}\,(3; 1; 2)$.

Записать уравнение плоскости α.

Вспомогательная задача. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{n}(A; B; C)$.

Обращаемся к уравнению плоскости, записанному в теореме 29.1, выясняем, что в данном случае точка $M(x_1; y_1; z_1)$ совпадает с началом координат и, следовательно, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$. Поэтому уравнение плоскости $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ приобретает более простой вид: $Ax + By + Cz = 0$. Полученное уравнение является уравнением плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{n}(A; B; C)$.

Решение основной задачи. На основании результата вспомогательной задачи можно сразу записать уравнение плоскости α:

$$3x + y + 2z = 0.$$

101, *а.*

Краткая запись задачи:
1) $M \in \alpha, \alpha \perp \overrightarrow{OM}(1; 2; 3)$.

Записать уравнение плоскости α.

Решение. Конкретизируем уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M(x_1; y_1; z_1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(A; B; C)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

По условию задачи $\vec{n} = \overrightarrow{OM}$. Роль точки M, о которой говорится в теореме 29.1, выполняет конец вектора $\overrightarrow{OM}$. Запишем координаты точки M: $M(1; 2; 3)$. Поэтому искомое уравнение плоскости α имеет вид:

$$1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 3) = 0; \quad x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

101, *в.*

Краткая запись задачи:
2) $P(3; 0; 0)$, $Q(0; 2; 0)$, $S(0; 0; 1)$.

Составить уравнение плоскости PQS.

Замысел решения. Так как нормальный вектор плоскости неизвестен, то легче исходить из общего уравнения плоскости $Ax + By + CzD = 0$. Составление искомого уравнения сводится к нахождению коэффициентов A, B, C и D.

Решение. Так как плоскость PQS проходит через данные точки, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости. Подставив координаты точек P, Q и S в общее уравнение плоскости, получим систему равенств: $3A + D = 0$, $2B + D = 0$, $C + D = 0$. Откуда $A = -\frac{D}{3}$, $B = -\frac{D}{2}$, $C = -D$. После этого общее уравнение плоскости можно записать следующим образом: $-\frac{D}{3}x - \frac{D}{2}y - Dz + D = 0$. Поэтому, разделив обе части уравнения на $-D$, получим искомое уравнение

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + z - 1 = 0, \text{ или } 2x + 3y + 6z - 6 = 0.$$

102, *а.*

Краткая запись задачи:
2) $3x - y + 2z = 5$ — уравнение плоскости α.

Найти координаты точек пересечения координатных осей с плоскостью α.

Решение. Точки пересечения плоскости α с осями x, y и z имеют соответственно вид: $A(x;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ y;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ z)$. Поэтому, положив в уравнении плоскости $y = z = 0$, найдем абсциссу точки A: $3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$. Значит, $A\left(\frac{5}{3};0;0\right)$. Аналогично находим, что $B(0;\ -5;\ 0)$, $C\left(0;0;\frac{5}{2}\right)$.

104, *а.*

Краткая запись задачи:
Сфера с центром $O(0;\ 0;\ 0)$ проходит через точку $A(2;\ 3;\ 1)$.

Записать уравнение сферы.

Поиск решения и ***решение***. Так как центр сферы находится в начале координат, то уравнение сферы имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Для отыскания уравнения сферы остается найти R^2. Для этого воспользуемся координатами точки A. Так как сфера проходит через точку A, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению сферы. Приходим к верному равенству $4 + 9 + 1 = R^2$, отсюда $R^2 = 14$. Составим теперь искомое уравнение сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

104, *в.*

Краткая запись задачи:
а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x = 0$, б) $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2z = 3$.

Являются ли эти уравнения уравнениями сферы?

Решение. а) Выделим квадрат двучлена, содержащего x:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Получили уравнение сферы с центром $C(-1; 0; 0)$ и радиусом $R = 1$;
б) выделим квадраты двучленов с y и z:

$$x^2 + y^2 + 6y + 9 - 9 + z^2 - 2z + 1 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 13.$$

Получили уравнение сферы с центром $C(0; -3; 1)$ и радиусом $R = \sqrt{13}$.

Занятие 34. Векторный и координатный методы при решении задач

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 106–112 (номера с буквой «а») из раздела «Задания для самостоятельной работы».

106.

Краткая запись задачи:
$O(0; 0; 0)$, $A(0; 3; 0)$, $MO : MA = 2$.

Найти геометрическое место точек M.

Замысел решения. Попытаемся составить уравнение искомого геометрического места точек и по уравнению определить, какую фигуру оно представляет. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка искомого геометрического места точек. Какое уравнение, связывающее координаты x, y и z, можно записать? Нельзя ли равенство $MO = 2MA$ переписать в координатах?

Решение. Перепишем равенство $MO = 2MA$ в координатах:
$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{x^2+(y-3)^2+z^2}$, $3x^2+3y^2+3z^2-24y+36=0$.

Разделим обе части этого уравнения на 3 и выделим полный квадрат. Получим уравнение $x^2+(y-4)^2+z^2=4$. Оно является уравнением сферы с центром $C(0; 4; 0)$ и радиусом $R = 2$. Эта сфера является искомым геометрическим местом точек.

107.

Краткая запись задачи:
$\overrightarrow{OA}(1; 1; 0)$, $\overrightarrow{OB}\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{OC}(2; 3; 1)$.

Принадлежат ли точки O, A, B и C одной плоскости?

Замысел решения. Пусть $OA = \vec{a}$, $OB = \vec{b}$, $OC = \vec{c}$. Проверим, нельзя ли вектор $\vec{c}$ представить в виде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$. Это означало бы, что векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ компланарны, и следовательно, было бы доказано, что точки O, A, B и C принадлежат одной плоскости.

Решение. Для нахождения α и β составим уравнения:

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \frac{1}{2}\beta, \\ 3 = \alpha + \beta, \\ 1 = 0 + \frac{1}{2}\beta. \end{cases}$$

Отсюда $\beta = 2$, $\alpha = 1$. Следовательно, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Это означает, что векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ компланарны, и поэтому точки O, A, B и C принадлежат одной плоскости.

109.

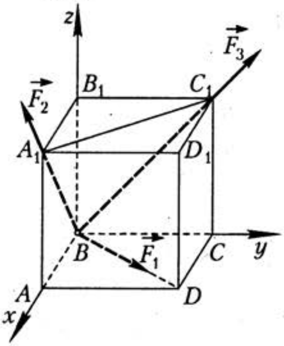


Рис. 81

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $AB = 1$, силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ приложены к вершине B и направлены соответственно по отрезкам BD, BA_1 и BC_1, $|\vec{F}_1| = 1$ Н, $|\vec{F}_2| = 2$ Н, $|\vec{F}_3| = 3$ Н (рис. 81).

Найти величину равнодействующей данных сил.

Замысел решения. Примем вершину B за начало координат, а исходящие из нее ребра пусть задают оси координат. Запишем координаты каждого из векторов $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, а затем координаты суммы этих векторов. Зная координаты суммы векторов $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, найдем величину равнодействующей, т. е.

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3|.$$

Решение. Запишем координаты векторов-сил:

$$\vec{F}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), \quad \vec{F}_2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}; 0; \frac{2}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{F}_3\left(0; \frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Тогда равнодействующая $\vec{R}$ этих сил имеет координаты

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{4}{\sqrt{2}}; \frac{5}{\sqrt{2}}\right).$$

Поэтому $|\vec{R}| = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{16}{2} + \frac{25}{2}} = 5$ (Н).

110, *а.*

Краткая запись задачи:

Доказать: $P \in AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + (1-m)\overrightarrow{OB}$, где $\overrightarrow{OA} \nparallel \overrightarrow{OB}$, $m \in \mathbf{R}$.

Решение. Выполним следующие преобразования:

$$P \in AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = (1-m)\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = (1-m)\overrightarrow{AO} + (1-m)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (1-m-1)\overrightarrow{AO} + (1-m)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + (1-m)\overrightarrow{OB}.$$

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Задачи 106–112 (номера с буквой «б») из раздела «Задания для самостоятельной работы».

108, *б.*

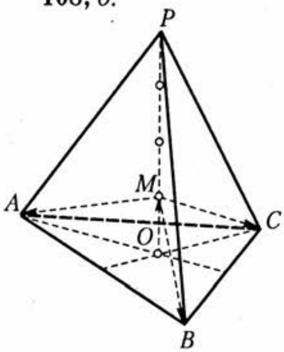


Рис. 82

Краткая запись задачи:
$PABC$ — тетраэдр.

Найти точку M такую, что
$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Замысел решения. Нельзя ли догадаться, на каком отрезке находится искомая точка M? Для этого обратимся к аналогичным задачам для отрезка и треугольника. Для отрезка AB равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ выполняется, если M — середина отрезка AB; для треугольника ABC точка M, удовлетворяющая равенству $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$, лежит на медиане треугольника. Естественно предположить, что аналогичная точка M для тетраэдра лежит на отрезке, соединяющем вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани (рис. 82). Проверим, оправдается ли наше предположение.

Решение. Пусть O — центроид основания ABC, проведем отрезок PO, согласно сделанному предположению на отрезке PO выберем точку M, построим векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MP}$. Наше предположение подтвердилось бы, если бы оказалось, что сумма векторов $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ равна вектору, противоположному вектору $\overrightarrow{MP}$. (В этом случае сумма векторов $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ равнялась бы нулевому вектору.) Имеем: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3\overrightarrow{MO} + \vec{0} = 3\overrightarrow{MO}$. Тогда требуемое равенство можно переписать в виде $3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MP} = \vec{0}$.

Отсюда $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OP}.$

Таким образом, искомая точка M действительно существует. Она расположена на отрезке, соединяющем вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани, и делит этот отрезок в отношении 1 : 3 считая от центроида грани. (Заметим, что отрезок PO называется *медианой тетраэдра*.)

Занятие 35. Векторный и координатный методы при решении задач

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 106—112 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач четыре на выбор).

110, *в.*

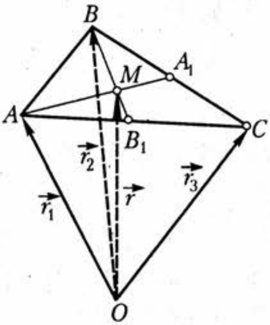


Рис. 83

Краткая запись задачи:
$DABC$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ — радиус-векторы вершин (рис. 83).

Доказать:
1) медианы ΔABC пересекаются в одной точке M;
2) $\vec{r}_M = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$.

Решение. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1 и BB_1. Воспользуемся векторным равенством из задачи 110, а и запишем с его помощью условия принадлежности точки M прямым AA_1 и BB_1:

$$\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = k\overrightarrow{OA} + \frac{1-k}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1-k}{2}\overrightarrow{OC}, \quad k \in \boldsymbol{R};$$

$$k\overrightarrow{OB} + (1-m)\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OB} + (1-m)\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) =$$

$$m\overrightarrow{OB} + \frac{1-m}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1-m}{2}\overrightarrow{OC}, \ m \in \boldsymbol{R}.$$

В силу единственности разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ по некомпланарным векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$:

$$k = \frac{1-m}{2}, \quad \frac{1-k}{2} = m, \quad \frac{1-k}{2} = \frac{1-m}{2}.$$

Отсюда $k = m = \frac{1}{3}$ и $\vec{r}_M = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$.

Далее обратим внимание на то, что радиус-вектор точки пересечения медиан AA_1 и BB_1 выражается только через радиус-векторы вершин треугольника. В этом выражении фактически не учитывается, какие именно две медианы выбраны. Поэтому для точки пересечения двух других медиан получим точно такое же равенство:

$$\vec{r}_M = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3).$$

Поэтому рассматриваемые точки совпадают. Следовательно, медианы треугольника пересекаются в одной точке. Получили еще одно доказательство теоремы о центроиде треугольника. Кроме того, радиус-вектор центроида треугольника

$$\vec{r}_M = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3).$$

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Задачи 106—112 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач четыре на выбор).
Индивидуальное задание: задачи 106—112 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач четыре на выбор).

110, *г.*

Краткая запись задачи:
PABC — тетраэдр, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ — радиус-векторы его вершин (рис. 84).

Доказать:
1) медианы тетраэдра пересекаются в одной точке;
2) радиус-вектор ее $\vec{r} = \frac{1}{4}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4)$.

Замысел решения. Для центроида треугольника выполнялись равенства

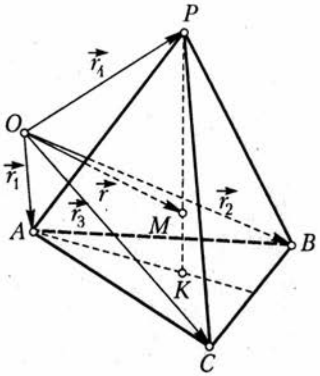


Рис. 84

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ и } \vec{r} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3).$$

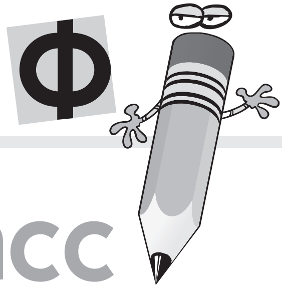
При решении задачи 108, б для тетраэдра была найдена точка M, для которой

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MP} = \vec{0}.$$

Возможно, для этой точки будет выполняться равенство

$$\vec{r} = \frac{1}{4}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4).$$

Проверим это предположение.



11 класс

Тема 1 МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: РАЗВИТИЕ ЭТОГО МЕТОДА В КУРСЕ СТЕРЕОМЕТРИИ

Занятие 1. Движения. Преобразования подобия. Их свойства

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Для проверки теоретического материала рекомендуется воспользоваться конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 1.3 теоретической части пособия для учащихся[1].

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 1—5 (номера с буквой «а») из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 1—6 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач три на выбор).

1, *а.*

Краткая запись задачи:
$A(x; y; z) \xrightarrow{\Pi} A_1(x; y; -z)$.

1) Является ли преобразование П движением?
2) Построить точки A и A_1; какую закономерность в их расположении вы заметили?

Замысел решения. Пусть $B(x_1; y_1; z_1)$ и $C(x_2; y_2; z_2)$ — две произвольные точки пространства. Запишем координаты точек B_1 и C_1 — образов точек B и C в преобразовании П. Найдем и сравним расстояния BC и B_1C_1 (или квадраты этих расстояний). Если $BC = B_1C_1$, то преобразование П является движением.

Вычисления. 1) Найдем координаты точек B_1 и C_1: $B_1(x_1; y_1; -z_1)$, $C_1(x_2; y_2; -z_2)$;

2) тогда $BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, $B_1C_1^2 = (x_2 - x_1)^2 +$ $+ (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$;

[1] Здесь и далее приводятся ссылки на задания из пособия для учащихся «Геометрия. Многообразие идей и методов. 11 класс».

3) таким образом, $BC^2 = B_1C_1^2$, $BC = B_1C_1$, и поэтому преобразование П является движением.

Обнаружение закономерности. После построений (выполните их самостоятельно) замечаем, что плоскость xOy проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна ему.

1, *б.*

Краткая запись задачи:

$A(x; y; z) \xrightarrow{\Pi} A_1(x; y; \frac{1}{2}z)$.

Является ли П движением?

Структурированная запись решения. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} B(x_1; y_1; z_1) \xrightarrow{\Pi} B_1\left(x_1; y_1; \dfrac{1}{2}z_1\right), \\ C(x_2; y_2; z_2) \xrightarrow{\Pi} C_1\left(x_2; y_2; \dfrac{1}{2}z_2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \\ B_1C_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \dfrac{1}{4}(z_2 - z_1)^2 \end{cases} \Rightarrow BC \neq B_1C_1.$$

Следовательно, преобразование П не является движением.

2, *б.*

Краткая запись задачи:

$A(x; y; z) \xrightarrow{\Pi} A_1(kx; ky; kz)$.

Является ли П преобразованием подобия?

Структурированная запись решения.

$$\left.\begin{array}{l} B(x_1; y_1; z_1) \xrightarrow{\Pi} B_1(kx_1; ky_1; kz_1), \\ C(x_2; y_2; z_2) \xrightarrow{\Pi} C_1(kx_2; ky_2; kz_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \\ B_1C_1^2 = k^2\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right] = k^2 BC^2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{B_1C_1}{BC}\right)^2 = k^2 \Rightarrow \frac{B_1C_1}{BC} = |k| \text{ — постоянно.}$$

Так как отношение $\dfrac{B_1C_1}{BC}$ постоянно, то П — преобразование подобия.

Занятие 2. Виды движений: симметрия относительно плоскости и центральная симметрия

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 2.3 теоретической части пособия для учащихся.

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 11, а—е из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 7—12 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач три на выбор).

9, *б.*

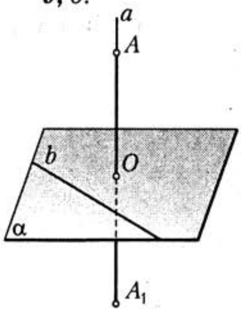


Рис. 1

Краткая запись задачи: Симметрия относительно плоскости α (рис. 1).
Найти инвариантные прямые данного преобразования (прямые, которые при преобразовании переходят сами в себя).

Высказывание предположения. Из наглядных соображений делаем предположение о том, что инвариантными прямыми при симметрии относительно плоскости будут прямые, которые либо принадлежат плоскости симметрии, либо перпендикулярны к ней.

Обоснование предположения. ***1-й случай.*** Так как каждая точка плоскости симметрии при преобразовании симметрии остается неподвижной, то все точки прямой, лежащей в плоскости симметрии, будут неподвижными.

Поэтому эта прямая при симметрии перейдет сама в себя и, следовательно, является инвариантной прямой данного преобразования.

2-й случай. Пусть $a \perp \alpha$ и $a \cap \alpha = O$. От точки O по разные стороны от нее на прямой a отложим равные отрезки OA и OA_1. При симметрии относительно плоскости α точка A перейдет в точку A_1, а точка A_1 — в точку A. Поэтому прямая AA_1 перейдет в прямую A_1A (воспользовались тем, что при движении прямая переходит в прямую). Но AA_1 и A_1A — одна и та же прямая a. Следовательно, прямая a переходит сама в себя и является инвариантной прямой симметрии относительно плоскости.

10, *б.*

Краткая запись задачи:
$\alpha(a) = a_1$, $\alpha(\beta) = \beta_1$, $a \cap a_1 = A$, $\beta \cap \beta_1 = b$.

Доказать: $A \in \alpha$, $b \subset \alpha$.

Решение. При решении задачи 9, б было установлено, что прямые a и a_1 пересекаются только в одном случае (когда $a \not\perp \alpha$, $a \otimes \alpha$), причем в этом случае точка их пересечения принадлежит плоскости симметрии: $A \in \alpha$. Аналогично из решения этой же задачи следует, что $b \subset \alpha$.

11, *г.*

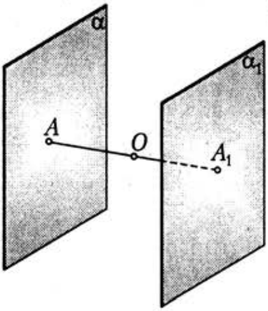


Рис. 2

Краткая запись задачи:
$a \parallel \alpha_1$, $A \in \alpha$, $A_1 \in \alpha_1$, O — середина отрезка AA_1 (рис. 2).

Верно ли, что $O(\alpha) = \alpha_1$?

Решение. Воспользуемся тем, что при центральной симметрии плоскость переходит в параллельную плоскость. Так как O — середина отрезка AA_1, то $O(A) = A_1$. При центральной симметрии с центром O плоскость α перейдет в плоскость, проходящую через точку A_1 и параллельную плоскости α. Но такой плоскостью является плоскость α_1. Следовательно, $O(\alpha) = \alpha_1$.

11, *д.*

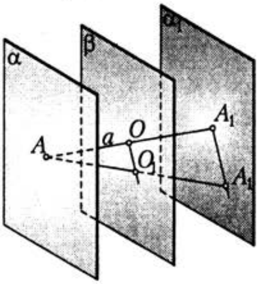


Рис. 3

Решение. Если обратиться к более простому геометрическому месту точек — геометрическому месту точек центров симметрии двух параллельных прямых, — то нетрудно обнаружить, что таким геометрическим местом точек является прямая, параллельная данным и проходящая через один из центров симметрии (можно вспомнить аналогичное утверждение из планиметрии). По аналогии для данной задачи выскажем предположение о том, что искомым геометрическим местом точек является плоскость β, проходящая через один из возможных центров симметрии плоскостей α и α_1 — точку O — и параллельная плоскостям α и α_1 (рис. 3). Обоснование этого предположения состоит из двух частей.

1) Пусть O_1 — произвольный центр симметрии плоскостей α и α_1. Докажем, что $O_1 \in \beta$. Рассмотрим две взаимно симметричные относительно центра O_1 точки A и A_2, принадлежащие соответственно плоскостям α и α_1. Проведем также отрезок OO_1. Имеем:

а) $\left.\begin{array}{l} O_1(A) = A_2 \Rightarrow O_1A = O_1A_2, \\ O(A) = A_1 \Rightarrow OA = OA_1 \end{array}\right\} \Rightarrow O_1O$ — средняя линия ΔAA_1A_2;

б) значит, $OO_1 \parallel A_1A_2$;

в) $(OO_1 \parallel A_1A_2$ и $A_1A_2 \subset \alpha_1) \Rightarrow (OO_1 \parallel \alpha_1$ и $\alpha_1 \parallel \beta) \Rightarrow OO_1 \parallel \beta$;

г) $(O \in \beta$ и $OO_1 \parallel \beta) \Rightarrow O_1 \in \beta$.

2) Пусть O_1 — произвольная точка плоскости β. Докажем, что O_1 является центром симметрии плоскостей α и α_1. Для этого проведем прямую AO_1. Пусть $A_2 = AO_1 \cap \alpha_1$. Нетрудно убедиться в том, что O_1 — середина отрезка AA_2 и, значит, на основании задачи 11, г является центром симметрии плоскостей α и α_1.

Из п. 1 и 2 следует справедливость сделанного предположения.

11, *е.*

Краткая запись задачи:
α, α_1 и β — плоскости, рассмотренные
при решении задачи 11, д (см. рис. к задаче 11, г).

Верно ли, что $\beta(\alpha) = \alpha_1$?

Решение. Предположим, что $\beta(\alpha) = \alpha_1$. Для доказательства этого предположения проведем прямую a, перпендикулярную параллельным плоскостям α, α_1 и β. Пусть $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = O$, $a \cap \alpha_1 = A_1$. Так как плоскость β — геометрическое место центров симметрии плоскостей α и α_1 и $O \in \beta$, то $OA = OA_1$.

Воспользуемся теперь тем, что симметрия относительно плоскости переводит перпендикулярные прямую и плоскость в перпендикулярные прямую и плоскость. Пусть β — плоскость симметрии. Найдем образ плоскости α в этой симметрии. Так как $AA_1 \perp \beta$ и $OA = OA_1$, то $\beta(A) = A_1$. Так как $a \perp \beta$, то $\beta(a) = a$. Образом плоскости α при симметрии относительно плоскости β будет плоскость, проходящая через точку A_1 и перпендикулярная образу прямой a, т. е. прямой a. Но такой плоскостью является плоскость α_1. Следовательно, $\beta(\alpha) = \alpha_1$.

Занятие 3. Виды движений: поворот вокруг оси и осевая симметрия

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 3.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 13, а—е из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 14—17 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач две на выбор).

13, *д.*

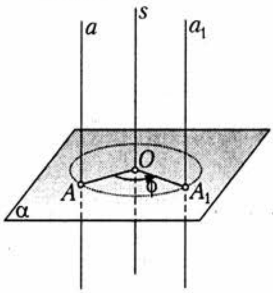


Рис. 4

Краткая запись задачи:
s — ось поворота, $a \parallel s$, a_1 — образ прямой a в данном повороте (рис. 4).

Верно ли, что $a_1 \parallel a$?

Высказывание предположения. С помощью модели приходим к предположению о том, что $a_1 \parallel a$. Как доказать это предположение?

Замысел решения. Воспользуемся тем, что любое движение (следовательно, и поворот вокруг оси) параллельные прямые переводит в параллельные прямые. Учтем также, что при повороте вокруг оси сама ось остается неподвижной, т. е. переходит сама в себя.

Решение.

Имеем: 1) $\left.\begin{array}{l} s \to s, \\ a \to a_1, \\ a \parallel s \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \parallel s;$

2) $(a_1 \parallel s$ и $a \parallel s) \Rightarrow a_1 \parallel a.$

13, е.

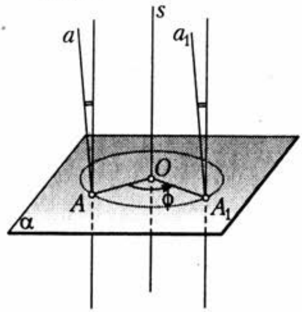


Рис. 5

Краткая запись задачи:
s — ось поворота, a_1 — образ прямой a в повороте вокруг оси s (рис. 5).

Доказать, что угол между прямой a и осью s равен углу между прямой a_1 и осью s.

Замысел решения. Воспользуемся тем, что в любом движении и, следовательно, в повороте вокруг оси величина угла между прямыми сохраняется (рис. 4).

Так как при повороте $s \to s$, $a \to a_1$, то угол между прямыми a и s равен углу между прямыми a_1 и s. Это и означает, что угол между каждой прямой и осью поворота остается неизменным.

Примечание. Задача 13, е является обобщением задачи 13, д, в которой также утверждается неизменность угла между прямой и осью поворота в случае, когда прямая образует с осью угол, равный 0°.

15, а.

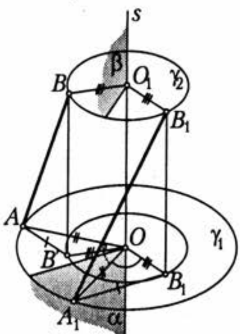


Рис. 6

Краткая запись задачи:
$AB = A_1B_1$,
$AB \nparallel A_1B_1$.

1) Доказать, что отрезок AB можно совместить с отрезком A_1B_1 поворотом вокруг оси.
2) Построить ось и угол поворота.

Анализ. Допустим, что задача решена и прямая s является осью поворота (рис. 6), при котором отрезок AB переходит в равный ему отрезок A_1B_1. Иначе говоря, при повороте вокруг оси s как только точка A совмещается с точкой A_1, точка B совмещается с точкой B_1. Выясним, каким образом можно построить ось s и угол поворота.

Для построения оси s необходимо воспользоваться некоторыми ее свойствами. Обратим внимание, что точки оси s равноудалены от точек A и A_1 (см. задачу 13, в). Так как геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и A_1, есть плоскость симметрии этих точек, то это означает, что точки оси s должны принадлежать плоскости симметрии точек A и A_1.

Аналогично приходим к выводу о том, что ось s должна принадлежать плоскости симметрии точек B и B_1.

Итак, ось поворота s может быть построена как прямая, по которой пересекаются плоскости симметрии точек A и A_1, B и B_1.

Осталось выяснить, что при повороте вокруг оси s если точка A переходит в точку A_1, то точка B переходит в точку B_1.

Занятие 4. Виды движений: параллельный перенос и винтовое движение

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 4.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 18, а—д из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 19; 20 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач две на выбор).

18, *в.*

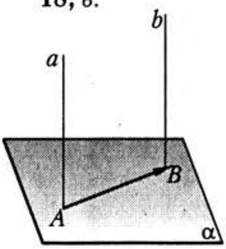


Рис. 7

Краткая запись задачи:
$a \parallel b$, $a \perp \alpha$ (рис. 7).

Верно ли, что $b \perp \alpha$?

Доказательство проведите с помощью параллельного переноса. Как нужно выбрать вектор переноса? Воспользуемся тем, что параллельный перенос (как и любое движение) перпендикулярные прямую и плоскость переводит в перпендикулярные прямую и плоскость.

Пусть $a \cap \alpha = A$, $b \cap \alpha = B$. Выполним параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. Так как $\overrightarrow{AB} \subset \alpha$, то при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ плоскость α перейдет сама в себя (окажется инвариантной плоскостью). Воспользуемся тем, что при параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую. Поэтому при переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ прямая a перейдет в прямую, проходящую через точку B и параллельную прямой a. Но такой прямой является прямая b (она проходит через точку B и параллельна прямой a). Следовательно, $\overrightarrow{AB}(a) = b$. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(a) = b, \\ \overrightarrow{AB}(\alpha) = \alpha, \\ a \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp \alpha.$$

18, *г.*

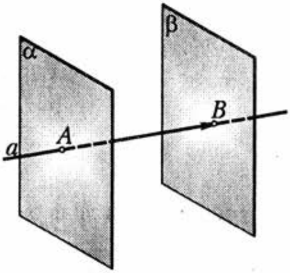


Рис. 8

Краткая запись задачи:
$\alpha \parallel \beta$, $\alpha \perp a$ (рис. 8).

Верно ли, что $\beta \perp a$?

Доказательство проведите с помощью параллельного переноса.

Как нужно выбрать вектор переноса?

Замысел решения. Применим тот же самый замысел, что и при решении предыдущей задачи

Решение. Пусть $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = B$. Выполним параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. Так как $\overrightarrow{AB} \subset \alpha$, то при этом переносе прямая a перейдет сама в себя (будет инвариантной прямой данного преобразования). Плоскость α перейдет в плоскость, проходящую через точку B и параллельную плоскости α (так как при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную плоскость). Но такой плоскостью является плоскость β (она проходит через точку B и параллельна плоскости α).

Занятие 5. Гомотетия как пример преобразования подобия

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 5.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 21; 22, а, б; 23 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 23, г—е из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач одну на выбор).

Занятие 6. Применение метода геометрических преобразований при решении задач

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 6.1—6.2 теоретической части пособия для учащихся.

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 24, а—в; 25, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 26, а—в из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

26, *б.*

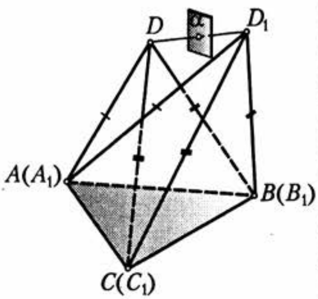


Рис. 9

Краткая запись задачи:
Φ и Φ_1 — равные одинаково ориентированные фигуры;
$A, B, C, \ldots$ — точки фигуры Φ;
$A_1, B_1, C_1, \ldots$ — соответственные точки фигуры Φ_1;
$A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$;
A, B, C не лежат на одной прямой (рис. 9).

Доказать, что остальные соответственные точки фигур Φ и Φ_1 совпадают.

Поиск решения. Пусть фигуры Φ и Φ_1 — одинаково ориентированные равные фигуры, в которых три пары соответственных точек — пары совпавших точек: $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$ и точки A, B, C не лежат на одной прямой. Докажем, что любая другая пара соответственных точек этих фигур — точки D и D_1 — также пара совпавших точек.

Рассмотрим с этой целью два тетраэдра: $DABC$ и D_1ABC. У этих тетраэдров одно и то же основание — треугольника ABC. Задача сводится к тому, чтобы доказать совпадение вершин D и D_1 этих тетраэдров. Какие свойства рассматриваемых тетраэдров можно обнаружить?

Так как A и A_1, B и B_1, C и C_1, D и D_1 — соответственные точки, то $AD = AD_1$, $BD = BD_1$, $CD = CD_1$, т. е. боковые ребра этих тетраэдров соответственно равны.

Не встречалась ли вам аналогичная ситуация раньше? Вспомним задачу, в которой также говорится о двух тетраэдрах с одним и тем же основанием, соответственно равными боковыми ребрами и расположенными по одну сторону от плоскости основания. Как решалась эта задача?

Для ее решения через середину отрезка DD_1 проводилась плоскость, перпендикулярная отрезку DD_1, и доказывалось, что эта плоскость совпадает с плоскостью основания ABC.

В итоге приходили к противоречию: с одной стороны, точки D и D_1 лежат по разные стороны от построенной плоскости, с другой — по одну ее сторону. Полученное противоречие означает, что $D = D_1$. Очевидно, что эти рассуждения можно провести и при решении данной задачи.

26, *в.*

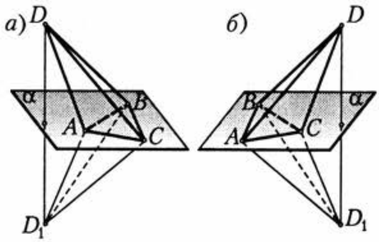


Рис. 10

Краткая запись задачи:
Ф и $Ф_1$ — равные и противоположно ориентированные фигуры;
в остальном условие задачи 26, б сохраняется (рис. 10).

$ABC(Ф) = Ф_1$.

Выполнение рисунка. Так как фигуры Ф и $Ф_1$ — противоположно ориентированные, то вершины D и D_1 тетраэдров $DABC$ и D_1ABC должны лежать по разные стороны от плоскости ABC (именно в этом случае обход треугольника ABC, если его рассматривать с вершин D и D_1, будет совершаться в противоположных направлениях). В результате приходим к рисунку 10, *а*.

Замысел решения. Нельзя ли данную задачу свести к предыдущей задаче? Иначе говоря, нельзя ли получить два тетраэдра, о которых говорится в задаче 26, б? Очевидно, что для того чтобы получить два одинаково ориентированных тетраэдра, достаточно тетраэдр $DABC$ симметрично отразить от плоскости ABC (рис. 10, *б*). Завершите эти рассуждения.

Занятие 7. Применение метода геометрических преобразований при решении задач

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 25, в—д; 26, г—ж из раздела «Задания для самостоятельной работы».

26, *д.*

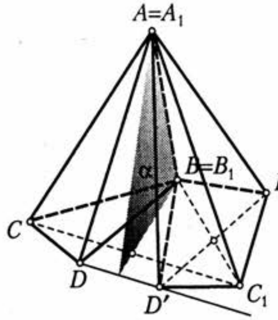


Рис. 11

Краткая запись задачи:
Ф и $Ф_1$ — равные и одинаково ориентированные фигуры,
A и A_1, B и B_1 — соответственные точки этих фигур,
$A = A_1$, $B = B_1$ (рис. 11).

Доказать, что Ф можно перевести в $Ф_1$ поворотом вокруг оси.

Замысел решения. Для решения задачи достаточно установить, что фигуру Ф можно перевести в фигуру $Ф_1$ последовательным выполнением двух симметрий относительно двух пересекающихся плоскостей. Этого действительно будет достаточно, так как последовательное выполнение указанных симметрий относительно плоскостей дает некоторый поворот вокруг оси.

Выполнение рисунка. Приводить на рисунке фигуры Ф и $Ф_1$ нет надобности. Ограничимся некоторым количеством соответственных точек этих фигур. Кроме точек A и B возьмем еще две точки C и D фигуры Ф. Приведем также соответственные им точки C_1 и D_1. Так как $A = A_1$, $B = B_1$, то на рисунке будем иметь два тетраэдра $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых боковые ребра AB и A_1B_1 совпадают.

26, *е.*

Краткая запись задачи:
Ф и $Ф_1$ — равные и противоположно ориентированные фигуры,
$A = A_1$, $B = B_1$ — совпавшие соответственные точки этих фигур (рис. 12).

Каким движением фигуру Ф можно совместить с фигурой $Ф_1$?

Решение. Рассмотрим плоскость α — плоскость симметрии точек C и C_1. Так как $CA = C_1A$, $CB = C_1B$, то эта плоскость пройдет через точки A и B. При симметрии относительно плоскости α тетраэдр $ABCD$ перейдет в тетраэдр ABC_1D', который с тетраэдром ABC_1D_1 одинаково ориентирован и имеет с ним три совпавшие соответственные точки A, B и C_1. На основании результата задачи 26, б $D' = D_1$. Следовательно, при симметрии относительно плоскости α фигура Φ перейдет в фигуру Φ_1.

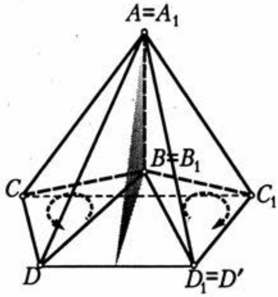


Рис. 12

26, *ж.* (*Теорема Даламбера.*)

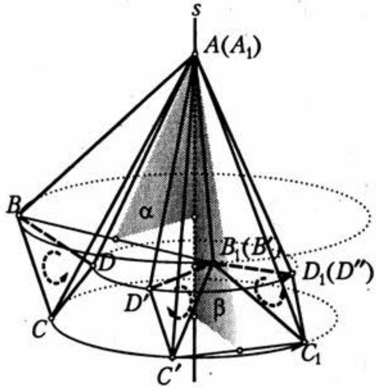


Рис. 13

Краткая запись задачи:
Φ и Φ_1 — две равные и одинаково ориентированные фигуры,
$A = A_1$ — соответственные точки этих фигур (рис. 13).

Доказать, что фигуры Φ и Φ_1 можно совместить поворотом вокруг оси, проходящей через точку A.

Решение. Пусть $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ — соответственные тетраэдры двух данных фигур, которые имеют одинаковую ориентацию. Пусть α — плоскость симметрии точек B и B_1. Выполнив симметрию относительно этой плоскости, мы тетраэдр $ABCD$ переведем в тетраэдр $AB_1C'D'$, имеющий с тетраэдром $AB_1C_1D_1$ общее ребро AB_1. Полученный тетраэдр подвергнем симметрии относительно плоскости симметрии точек C' и C_1 — плоскости β. При этом тетраэдр $AB_1C'D'$ перейдет в тетраэдр AB_1C_1D'', имеющий с тетраэдром $AB_1C_1D_1$ общую грань AB_1C_1. Последние два тетраэдра одинаково ориентированные и имеют по три совпавшие соответственные точки (точки A, B_1 и C_1). На основании задачи 26, б они совпадут. Значит, при последовательном выполнении двух симметрий относительно плоскостей α и β фигура Φ переходит в фигуру Φ_1. Последовательное выполнение симметрий относительно двух пересекающихся плоскостей ($\alpha \otimes \beta$, так как они имеют общую точку A) есть поворот, осью которого является линия пересечения этих плоскостей. Следовательно, данные фигуры совмещаются поворотом вокруг оси. Заметим также, что ось поворота (линия пересечения плоскостей α и β) проходит через точку A.

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 26, ж—к из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 27—29 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач две на выбор).

26, *з.*

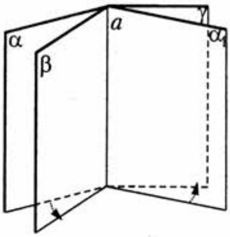


Рис. 14

Краткая запись задачи:
α, β и γ — плоскости, проходящие через прямую a (рис. 14).

Каким преобразованием можно заменить последовательное выполнение трех симметрий относительно плоскостей α, β и γ?

Решение. Последовательное выполнение двух симметрий относительно плоскостей α и β можно заменить поворотом вокруг оси a на угол, равный удвоенному углу между этими плоскостями.

В свою очередь этот поворот можно заменить вновь последовательным выполнением двух симметрий относительно некоторых плоскостей α_1 и γ.

Эти плоскости пересекаются по прямой a и образуют между собой угол, одинаково ориентированный и равный с углом между плоскостями α и β.

В этом случае симметрии относительно плоскостей α и β, α_1 и γ задают один и тот же поворот вокруг оси a.

В итоге последовательное выполнение симметрий относительно плоскостей α, β и γ можно заменить последовательным выполнением симметрий относительно плоскостей α_1, γ и γ.

Двукратное выполнение симметрии относительно плоскости γ не изменяет положения точек. Поэтому последовательное выполнение трех симметрий относительно плоскостей α_1, γ и γ представляет собой симметрию относительно плоскости α_1.

Отсюда следует, что последовательное выполнение трех симметрий относительно плоскостей α, β и γ можно заменить симметрией относительно одной плоскости α_1, проходящей через прямую a.

Тема 2 МНОГОГРАННИКИ, ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ИХ КОМБИНАЦИИ

Занятие 8. Понятие многогранника. Цилиндр и призма

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—4 из п. 7.3 и задачи 1—3 из п. 8.2 теоретической части пособия для учащихся.

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 31; 32 из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 33 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

33, *а.*

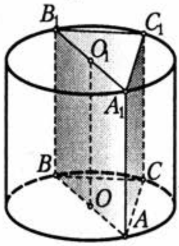


Рис. 15

Краткая запись задачи:
$ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма, вписанная в цилиндр,
OO_1 — ось цилиндра,
грань AA_1B_1B проходит через ось OO_1 (рис. 15).

1) Доказать, что $AA_1C_1C \perp BB_1C_1C$.
2) Найти связь между площадями боковых граней.

Примечание. Для решения данной задачи необходимо в опережающем порядке ознакомить учащихся с понятием призмы, вписанной в цилиндр.

Поиск решения. Для доказательства перпендикулярности боковых граней AA_1C_1C и BB_1C_1C достаточно доказать, что линейный угол двугранного угла, образованного этими гранями, — прямой. Выясним, какой угол является линейным углом двугранного угла с ребром CC_1. Так как плоскость основания цилиндра перпендикулярна к образующим, то она перпендикулярна к образующей CC_1. Поэтому угол ACB является линейным углом двугранного угла, образованного гранями AA_1C_1C и BB_1C_1C. Осталось доказать, что угол ACB — прямой. Каким фактом из планиметрии при этом можно воспользоваться? (Тем, что вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым.)

Перейдем теперь к нахождению связи между площадями боковых граней. Обозначим буквами S, S_1 и S_2 площади соответственно граней AA_1B_1B, AA_1C_1C, BB_1C_1C. Какие равенства для площадей этих граней можно записать? ($S = AB \cdot H$, $S_1 = AC \cdot H$, $S_2 = BC \cdot H$, где H — высота призмы (цилиндра).) Воспользуемся этими равенствами и тем, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$. (Завершите рассуждения самостоятельно.)

Занятие 9. Понятие многогранника. Цилиндр и призма

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 34; 35 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

34.

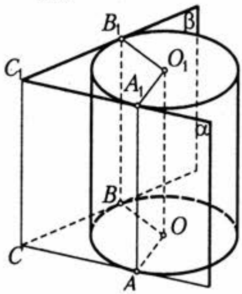


Рис. 16

Краткая запись задачи:
$\alpha \nparallel \beta$ — две плоскости, касающиеся цилиндра, $CC_1 = \alpha \cap \beta$, OO_1 — ось цилиндра (рис. 16).

Доказать, что $CC_1 \parallel OO_1$.

Выполнение рисунка. Проводим две образующие цилиндра AA_1 и BB_1 (они параллельны оси цилиндра OO_1). Через AA_1 и BB_1 проводим соответственно плоскости α и β. Пусть CC_1 — линия пересечения плоскостей α и β. Надо доказать, что $CC_1 \parallel OO_1$.

Замысел решения. Нельзя ли вначале доказать, что $CC_1 \parallel BB_1$?

35, *а.*

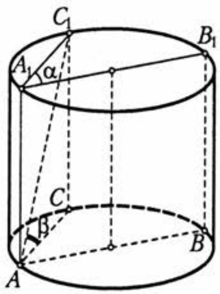


Рис. 17

Краткая запись задачи:
AA_1 — образующая цилиндра,
AA_1B_1B — осевое сечение,
AA_1C_1C — неосевое сечение,
$\angle BAC = \alpha$, $\angle C_1AC = \beta$, $AC = d$ (рис. 17).

Найти AA_1 и S основания цилиндра.

Анализ рисунка. Так как плоскость основания цилиндра перпендикулярна образующей AA_1, то угол BAC — линейный угол двугранного угла, образованного гранями BB_1A_1A и CC_1A_1A. Поэтому $\angle BAC = \alpha$ — данный угол между плоскостями двух сечений.

Поскольку CC_1 перпендикулярна плоскости основания цилиндра, то AC является проекцией наклонной AC_1 (на плоскость основания цилиндра). Поэтому угол C_1AC — угол между диагональю AC_1 и плоскостью основания цилиндра. По условию $\angle C_1AC = \beta$. Заметим также, что $AC_1 = d$.

Направление поиска решения. Выясним, с каким треугольником будем связывать нахождение образующей AA_1. В каком треугольнике имеется больше всего данных? Замечаем, что таким треугольником является треугольник C_1AC. (В нем известна гипотенуза AC_1 и острый угол β.) Из этого треугольника найдем $C_1C = AA_1$.

Для нахождения площади основания цилиндра необходимо найти радиус этого основания. Какие элементы (хорды, углы) круга можно найти? (Выясняем, что из треугольника AC_1C можно найти AC.) Тогда для основания цилиндра знаем хорду AC и $\angle BAC$. Попытаемся с помощью этих элементов круга найти его радиус. (Завершите решение задачи.)

Отметим основные черты направления поиска: замечаем, что большее количество данных находится «за пределами» основания цилиндра. Поэтому естественно попытаться вначале найти образующую цилиндра. Затем, «спускаясь» сверху на основание цилиндра, находим элементы основания и его радиус.

35, *б.* (*Обобщенная задача.*)

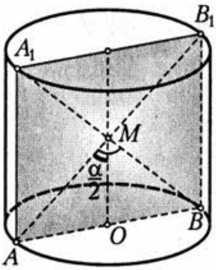


Рис. 18

Краткая запись задачи:
$k : \pi$ — отношение площади осевого сечения к площади основания цилиндра (рис. 18).

Найти угол между диагоналями осевого сечения.

Эвристический прием. Если в задаче дается отношение величин, то полезно выразить это отношение через отношения некоторых других вспомогательных величин.

Решение обобщенной задачи. Пусть R и H — соответственно радиус основания и высота цилиндра.

Тогда $\frac{k}{\pi} = \frac{2RH}{\pi R^2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2R}{H}$, $R = \frac{2\pi H}{\pi k} = \frac{2H}{k}$.

Отсюда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{4H}{kH} = \frac{4}{k}$, $\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg}\frac{4}{k}$, $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{4}{k}$.

Возвращение к исходной задаче. В исходной задаче $k = 4$. Если $k = 4$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{k} = 1$. Поэтому в этом случае $\frac{\alpha}{2} = 45°$, $\alpha = 90°$. Диагонали осевого сечения оказываются перпендикулярными, а само осевое сечение является квадратом.

35, *г.* (*Обобщенная задача.*)

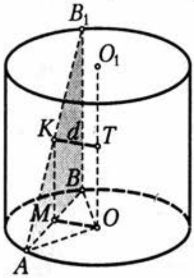


Рис. 19

Краткая запись задачи:
H — высота цилиндра, R — радиус основания,
$AB_1 = d$, OO_1 — ось цилиндра (рис. 19).

Найти x — расстояние между AB_1 и OO_1.

Построение общего перпендикуляра прямых AB_1 и OO_1. Так как $AB_1 \dot{-} OO_1$, то применим известный алгоритм построения общего перпендикуляра к двум данным скрещивающимся прямым. Для этого через прямую AB_1 проведем плоскость, параллельную прямой OO_1: через точку B_1 проведем образующую B_1B, она параллельна OO_1. Поэтому плоскость $AB_1B \parallel OO_1$. Далее необходимо прямую OO_1 ортогонально спроектировать на плоскость AB_1B: из точки O проведем перпендикуляр OM к AB ($AM = MB$), через точку M проведем прямую $MK \parallel OO_1$; MK — проекция прямой OO_1 на плоскость AB_1B. Через полученную точку K проведем $KT \parallel MO$; $T \in OO_1$. Прямая KT — общий перпендикуляр, пересекающий скрещивающиеся прямые OO_1 и AB_1. Задача состоит в том, чтобы найти KT.

Замысел вычислений. Из построений следует, что $OTKM$ — прямоугольник. Поэтому $TK = OM = x$. Задача сводится к нахождению отрезка OM. Для этого, видимо, следует рассмотреть треугольник OAM.

35, *д.* (*Обобщенная задача.*)

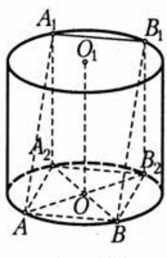


Рис. 20

Краткая запись задачи:
H — высота цилиндра, R — радиус основания,
AA_1B_1B — квадрат, вершины которого лежат на окружностях оснований (рис. 20).

Найти x — сторону квадрата.

Анализ рисунка (чертежа-наброска). Выполняем чертеж-набросок и с его помощью проводим следующие рассуждения. Квадрат AA_1B_1B ортогонально проектируется на плоскость основания цилиндра в прямоугольник AA_2B_2B. В самом деле, так как параллельные прямые AB и A_1B_1 проектируются в параллельные, то $A_2B_2 \parallel AB$. Кроме того, по теореме о трех перпендикулярах: $AB \perp BB_1 \Rightarrow AB \perp BB_2$. Значит, AA_2B_2B — прямоугольник. Тогда его диагонали пересекаются в центре O нижнего основания. Поэтому треугольник ABB_2 — прямоугольный.

Замысел решения. Есть смысл выделить два треугольника: ΔABB_2 и ΔBB_1B_2. В этих треугольниках содержатся как данные, так и искомый элемент. Нельзя ли найти x, выразив дважды отрезок BB_2 из треугольников BB_1B_2 и ABB_2?

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 36; 37 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 38 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

38, *а.*

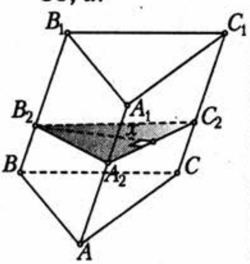


Рис. 21

Краткая запись задачи:
$ABCA_1B_1C_1$ — наклонная треугольная призма, расстояние между ребрами AA_1 и BB_1 — 37, расстояние между ребрами BB_1 и CC_1 — 13, расстояние между ребрами AA_1 и CC_1 — 40 (рис. 21).

Найти x — расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром.

Выполнение рисунка. Строим наклонную треугольную призму. После этого необходимо указать на рисунке данные расстояния между параллельными боковыми ребрами. Расстояние между параллельными прямыми измеряется как длина их общего перпендикуляра, заключенного между этими прямыми. Если допустить, что $A_2B_2 \perp BB_1$ и $B_2C_2 \perp BB_1$, то приходим к выводу о том, что плоскость, проходящая через A_2B_2 и B_2C_2, перпендикулярна BB_1. Тогда этой плоскости будут перпендикулярны все боковые ребра. Поэтому длины отрезков A_2B_2, B_2C_2, A_2C_2 — данные расстояния. Пусть $A_2B_2 = 37$, $B_2C_2 = 13$, $A_2C_2 = 40$.

Большей боковой гранью является грань AA_1C_1C. Поэтому x — расстояние от ребра BB_1 до плоскости грани AA_1C_1C.

Замысел вычислений. Для нахождения расстояния между параллельными прямой и плоскостью необходимо из некоторой точки прямой провести к этой плоскости перпендикуляр. Будем проводить этот перпендикуляр из точки B_2. Он будет лежать в плоскости $\alpha = (A_2B_2, B_2C_2)$. Поэтому искомый перпендикуляр является высотой треугольника $A_2B_2C_2$. Задача свелась к планиметрической: даны три стороны треугольника, найти его высоту.

Занятие 10. Понятие многогранника. Цилиндр и призма

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 39 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

39, *а*.

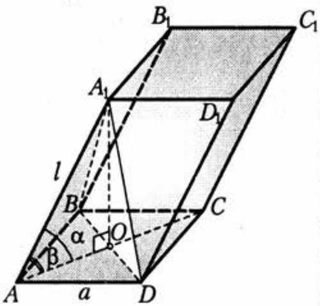


Рис. 22

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед,
$ABCD$ — квадрат,
$A_1A = A_1B = A_1C = A_1D$, $AB = a$, $AA_1 = l$ (рис. 22).

Найти: 1) высоту призмы; 2) косинус угла наклона AA_1 к плоскости основания $ABCD$; 3) косинус угла наклона ребра AA_1 к сторонам нижнего основания; 4) площадь полной поверхности параллелепипеда.

Поиск замысла решения. Начнем с выбора ключевого условия задачи, определяющего направление поиска. Таким условием являются не данные значения величин (сторона квадрата a, боковое ребро l), а условие — «одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания». Как воспользоваться этим условием? При решении задач в 10-м классе неоднократно встречались с ситуацией, когда точка (например, A_1) равноудалена от вершин некоторого многоугольника (например, квадрата $ABCD$). В какую точку при этом ортогонально проектируется точка A_1? Иначе говоря, какая точка будет являться основанием высоты данного параллелепипеда? (В итоге этих рассуждений приходим к выводу о том, что A_1O — высота параллелепипеда.) Проводим высоту A_1O, в результате получаем треугольник AA_1O, из которого может быть найдена эта высота. После этого находим косинус угла наклона ребра AA_1

к плоскости нижнего основания параллелепипеда. Косинус угла A_1AD может быть найден с помощью формулы Эйлера. При нахождении площади полной поверхности параллелепипеда необходимо учесть, что все боковые грани равны. Площадь одной боковой грани удобно найти, используя выражение площади параллелограмма через произведение двух его сторон на синус угла между ними.

39, *в.*

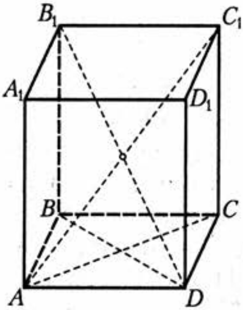


Рис. 23

Краткая запись задачи:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед (рис. 23),

$AB = 5$, $AD = 8$, $\angle BAD = 60°$,

меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 60°.

AC_1 — ?

B_1D — ?

Выполнение рисунка. Строим прямой параллелепипед. В этом параллелепипеде необходимо найти меньшую диагональ. Сравним диагонали AC_1 и B_1D. Рассмотрим их как гипотенузы прямоугольных треугольников ACC_1 и DBB_1. У них катеты CC_1 и BB_1 равны (как высоты параллелепипеда), $AC > BD$. Тогда гипотенуза больше в том треугольнике, у которого имеется больший катет: $AC_1 > DB_1$. Итак, B_1D — меньшая диагональ прямого параллелепипеда. Поэтому $\angle B_1DB = 60°$ — угол между меньшей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

Поиск замысла решения. Начнем с нахождения, например, диагонали AC_1. В какой треугольник можно включить эту диагональ? (В треугольник ACC_1.) Что известно и что неизвестно в этом треугольнике? (Замечаем, что данных в нем недостаточно; можно найти AC из треугольника ABC по теореме косинусов, но катет CC_1 остается неизвестным.) Может быть, начать решение с нахождения диагонали B_1D? (Замечаем, что треугольник DBB_1 более богат на известные величины: в нем есть данный $\angle B_1DB = 60°$; кроме того, BD можно найти из треугольника ABD по теореме косинусов.) Таким образом, замысел решения определился: вначале находим BD, затем из треугольника B_1BD — B_1D и BB_1 и, наконец, из треугольника ACC_1 находим AC_1.

39, *ж.*

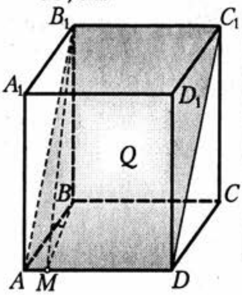


Рис. 24

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед (рис. 24),
$\angle BAD = \alpha < 90°$, $AD = a$, $S_{AB_1C_1D} = Q$,
$\frac{\pi}{2} - \alpha$ — угол между плоскостями AB_1C_1D и $ABCD$.

AB — ?
BB_1 — ?

Выполнение рисунка. Строим прямой параллелепипед и сечение, проходящее через сторону основания AD и противоположное ребро B_1C_1. Далее необходимо построить линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями AB_1C_1D и $ABCD$. Для этого из концов перпендикуляра BB_1 к плоскости основания проведем прямые, перпендикулярные AD. Легче провести вначале такой перпендикуляр через точку B. Так как угол α — острый, то основание M перпендикуляра BM к AD будет лежать на стороне AD. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $B_1M \perp AD$. Итак, $\angle B_1MB = \frac{\pi}{2} - \alpha$ — данный угол между плоскостями AB_1C_1D и $ABCD$. Построения закончены.

Замысел решения. В задаче говорится о площадях и углах. Попытаемся максимально использовать различные формулы площадей фигур. Можно ли найти по имеющимся данным площадь основания параллелепипеда? Какая формула может прийти на помощь? (Формула площади фигуры, полученная из данной при ортогональном проектировании.)

На основании этой формулы можно записать, что $S_{ABCD} = Q\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Q\sin\alpha$. Зная площадь основания, нельзя ли найти его сторону AB? Какую формулу площади параллелограмма при этом можно использовать? (Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.) Из какого треугольника удобнее всего найти BB_1? (Из треугольника B_1BM: в нем B_1M можно найти, а угол B_1MB дан.)

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 40 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 41; 42 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач две на выбор).

40, *a.*

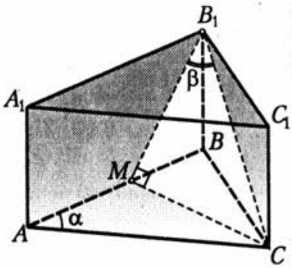


Рис. 25

Краткая запись задачи:
$BCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма (рис. 25),
$AB = AC = a$, $\angle BAC = \alpha$,
β — угол между B_1C и гранью AA_1B_1B.

BB_1 — ?

Выполнение рисунка. Строим прямую треугольную призму. Далее построим угол между B_1C и плоскостью грани AA_1B_1B. Для этого ортогонально спроектируем B_1C на плоскость AA_1B_1B. Точка B_1 лежит на плоскости проекций, поэтому она совпадает со своей проекцией. Построим проекцию точки C. Нужно из точки C провести перпендикуляр к плоскости AA_1B_1B.

Так как плоскость основания и плоскость боковой грани перпендикулярны, то перпендикуляр CM к плоскости AA_1B_1B будет принадлежать плоскости ABC. Кроме того, этот перпендикуляр должен быть перпендикуляром и к линии пересечения плоскостей ABC и $AA_1B_1B_1$, т. е. к прямой AB. Тогда CM — высота ΔABC. Построив таким образом точку M — проекцию точки C на плоскость AA_1B_1B, построим B_1M — проекцию наклонной B_1C к плоскости AA_1B_1B. Поэтому $\angle CB_1M = \beta$ — угол между B_1C и плоскостью грани AA_1B_1B. В итоге приходим к искомому рисунку.

Поиск решения. Сразу указать треугольник, содержащий сторону BB_1 и имеющий некоторые известные элементы, не удается. Катет BB_1 можно было бы найти по теореме Пифагора из треугольника B_1BC, если предварительно удастся найти B_1C и BC.

Выясним, как можно найти BC. Какой треугольник для этого окажется полезным? (Треугольник ABC, BC можно найти из него по теореме косинусов.)

Как теперь найти B_1C? Какой треугольник для этого окажется более подходящим? (Можно попытаться рассмотреть треугольник CMB_1. Этот треугольник прямоугольный, в нем известен угол β.) Очевидно, что B_1C будет найдено, если найдем CM. Какой треугольник для этого необходимо рассмотреть? (ΔAMC: он прямоугольный, в нем известны гипотенуза a и угол α (или $180° - \alpha$).) Поиск решения закончен, можно переходить к вычислениям.

40, *г.*

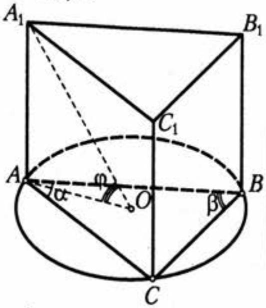


Рис. 26

Краткая запись задачи:
$ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма,
$\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, S — площадь ΔABC,
O — центр окружности,
описанной около ΔABC,
$\angle A_1OA = \varphi$ (рис. 26).

AA_1 — ?

Поиск решения. Высоту призмы AA_1 можно попытаться найти из треугольника A_1AO. Этот треугольник — прямоугольный, и в нем известен острый угол φ. Задача сводится к тому, чтобы найти OA — радиус окружности, описанной около основания ABC. Какие теоретические сведения необходимо для этого привлечь? Вспомним различные формулы площади треугольника, и в том числе формулу, связывающую радиус описанной окружности и площадь. Приходим к выводу о том, что более близкими к данным задачи являются следующие формулы:

$$R = \frac{abc}{4S},\ S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha,\ S = \frac{1}{2}ac\sin\beta,\ S = \frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta).$$

Использование этих формул содержит в себе ключ к решению задачи. Данные формулы позволяют найти произведение abc целиком, без нахождения по отдельности сторон a, b и c.

41, *а.*

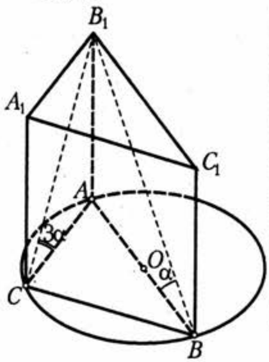


Рис. 27

Краткая запись задачи:
$ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма (рис. 27), в ΔABC $\angle C = 90°$, R — радиус окружности, описанной около ΔABC,
A_1B — диагональ наибольшей боковой грани,
A_1C — диагональ наименьшей боковой грани,
$\angle A_1BA = \alpha$, $\angle A_1CA = 3\alpha$.

Найти площадь сечения, проходящего через A_1B и A_1C.

Выполнение рисунка. Строим прямую призму, отмечаем прямой $\angle ACB$, описываем окружность около основания ABC (попутно выясняем вопрос о местонахождении центра этой окружности). Находим наибольшую грань (с учетом того, что большей стороне основания соответствует большая боковая грань) — грань AA_1B_1B. В качестве наименьшей грани выбираем грань A_1ACB_1 (считаем, что из катетов CA и CB катет CA — наименьший). Проводим сечение (им оказывается треугольник A_1BC). Выбираем, какой из углов A_1BA и A_1CA равен α, какой — 3α (для этого сравниваем катеты AB и AC прямоугольных треугольников A_1AB и A_1AC; так как у них катет A_1A — общий и $AB > AC$, то $\angle A_1BA < \angle A_1CA$, поэтому $\angle A_1BA = \alpha$, $\angle A_1CA = 3\alpha$). В итоге получаем рисунок, соответствующий условию задачи.

Поиск решения задачи (синтетический метод поиска). В задаче дается окружность, описанная около основания призмы. Где находится ее центр? (Центр этой окружности находится в середине гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC.) Можно ли сразу найти AB? ($AB = 2R$.) Зная AB, какие другие элементы призмы можно найти? (A_1B и AA_1.) Нужно ли находить A_1B и AA_1? Где они могут быть использованы в дальнейшем поиске? (A_1B — сторона треугольника сечения, площадь которого надо найти; AA_1 может быть использовано для нахождения другой стороны треугольника сечения — стороны A_1C.) Как бы вы завершили решение задачи? (Возможны варианты: найти третью сторону треугольника сечения — сторону BC и искомую площадь найти по формуле Герона или заметить, что треугольник A_1CB — прямоугольный (с помощью теоремы, обратной теореме Пифагора, или теоремы о трех перпендикулярах), и воспользоваться формулой $S = \frac{1}{2}CB \cdot CA_1$).

41, *в*.

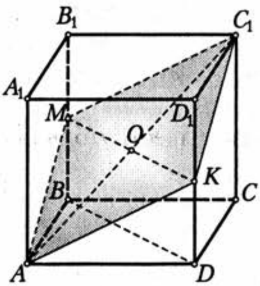


Рис. 28

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 28), $AB = 2$,
α — плоскость, проходящая через AC_1 и параллельная BD.

Найти площадь сечения куба плоскостью α.

Построение сечения. Пусть O — середина диагонали AC_1 куба, $O \in \alpha$. Если теперь через точку O провести прямую MK параллельно BD, то можно высказать предложение о том, что $MK \subset \alpha$. В самом деле, так как $MK \parallel BD$ и $BD \parallel \alpha$, то $MK \parallel \alpha$. Получили, что прямая MK параллельна плоскости α и проходит через точку O

этой плоскости. Значит, $MK \subset \alpha$. Тогда M и K — точки пересечения секущей плоскости α с ребрами куба BB_1 и DD_1. Получаем четырехугольник AMC_1K — искомое сечение.

Определение вида сечения. Так как секущая плоскость пересекает параллельные плоскости граней куба по параллельным прямым, то в сечении образуется параллелограмм AMC_1K. Рисунок подсказывает, что этот параллелограмм является ромбом. Проверим это предположение. Рассмотрим проекцию AC_1 на плоскость нижнего основания куба. Так как BD (а значит, и параллельная BD прямая MK) перпендикулярна проекции AC, то BD и MK перпендикулярны наклонной AC_1. Итак, $AC_1 \perp MK$. Параллелограмм AMC_1K, имея перпендикулярные диагонали, является ромбом.

41, *г.*

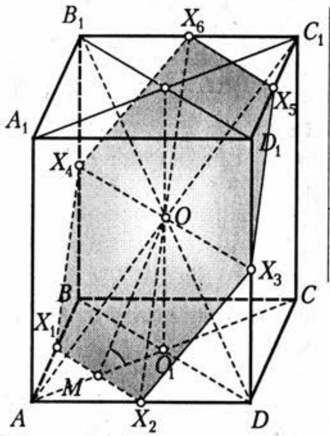


Рис. 29

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма (рис. 29),
$AB = a$, $AA_1 = 2a$,
X_1 и X_2 — середины ребер AB и AD,
O — центр симметрии призмы.

Найти площадь сечения призмы плоскостью X_1X_2O.

Построение сечения. Так как точка O и прямая X_1X_2 принадлежат плоскости сечения, то прямая X_3X_4, проходящая через точку O и параллельная X_1X_2, принадлежит плоскости сечения. Тогда точки X_3 и X_4 — две вершины искомого сечения. Еще две вершины сечения X_5 и X_6 построим как точки, симметричные соответственно точкам X_1 и X_2 относительно центра O (X_5 — середина ребра D_1C_1, X_6 — середина ребра B_1C_1). Таким образом, шестиугольник $X_1X_2X_3X_5X_6X_4$ — искомое сечение.

Вычисление площади сечения. Воспользуемся формулой, связывающей площади фигуры и ее проекции. Строим ортогональную проекцию многоугольника сечения на плоскость нижнего основания призмы и находим его площадь: $Q = a^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{3a^2}{4}$. Найдем теперь угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Из прямоугольного треугольника OMO_1 имеем:

$$OO_1 = a, \quad O_1M = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a \cdot 4}{a\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+8}} = \frac{1}{3}.$$

Тогда $Q = S_{сеч}\cos\alpha \Rightarrow S_{сеч} = \dfrac{Q}{\cos\alpha} = \dfrac{3a^2 \cdot 3}{4} = \dfrac{9a^2}{4}.$

41, *ж.*

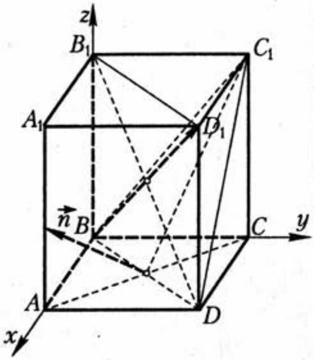


Рис. 30

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед,
основание $ABCD$ — квадрат (рис. 30).

Найти наибольший угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

Замысел решения. Высота H и сторона основания a прямоугольного параллелепипеда в задаче не даются. Если бы они давались, то угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1 принимал бы некоторое определенное значение и ставить вопрос о том, когда этот угол окажется наибольшим, не имело бы смысла. Таким образом, требование задачи можно переформулировать так: «При каком соотношении между H и a угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1 окажется наибольшим?» Если решать задачу синтетическим методом, то необходимо построить указанный угол, включить его в некоторый треугольник и попытаться найти одну из тригонометрических функций этого угла. Затем по полученному выражению для этой функции установить, при каком значении H рассматриваемый угол принимает наибольшее значение. Построение угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1 в условиях, когда размеры прямоугольного параллелепипеда не заданы (данные задачи не определяют этот параллелепипед), весьма сложно. Поэтому попытаемся воспользоваться координатным методом.

Зададим соответствующим образом систему координат, составим уравнение плоскости BDC_1 и по нему запишем координаты нормального вектора. Затем с помощью координат нормального вектора плоскости и вектора BD_1 найдем косинус угла между ними. Как этим можно воспользоваться для окончательного решения задачи?

Занятие 11. Пирамида

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 9.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 43, а, б; 44, а—в из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 43, в—и из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

44, а.

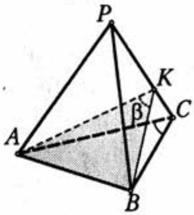


Рис. 31

Краткая запись задачи:
$PABC$ — правильный тетраэдр,
δ — двугранный угол при его ребре (рис. 31).

Доказать: $\delta > 60°$.

Замысел решения. Пусть угол AKB — линейный угол двугранного угла с ребром PC: $\angle AKB = \delta$. Докажем, что $\delta > 60°$. Заметим, что угол AKB является ортогональной проекцией угла ACB.

Нельзя ли сравнить угол AKB и $\angle ACB = 60°$? Для этого воспользуемся обобщенной формулой Эйлера и ранее решенной задачей.

Решение.

На основании обобщенной формулы Эйлера и ранее решенной задачи имеем, что $\angle AKB > \angle ACB$. Поэтому $\delta > 60°$.

Занятие 12. Пирамида

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 45 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 46—48 из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 49—51 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач одну-две на выбор).

46.

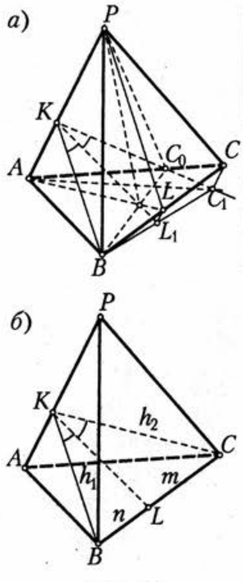


Рис. 32

Краткая запись задачи:
$PABC$ — тетраэдр (рис. 32),
PAL — биссекторная плоскость двугранного угла при ребре PA,
L — точка пересечения биссекторной плоскости с ребром BC.

Доказать: $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{S_{BAP}}{S_{CAP}}$.

Вспомогательная задача. Решим данную задачу для случая, когда $BC \perp PA$ (рис. 32, *б*).

Решение вспомогательной задачи. В этом случае через ребро BC можно провести плоскость BKC, перпендикулярную ребру PA. Так как биссектор делит линейный угол BKC пополам, то $\angle BKL = \angle CKL$. Учтем еще, что $BK \perp PA$, $CK \perp PA$, т. е. BK и CK — высоты соответственно граней BAP и CAP. Тогда на основании свойства биссектрисы треугольника, применив его к треугольнику BKC, будет иметь: $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{BK}{CK}$.

Отсюда $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{BK}{CK} = \dfrac{\frac{1}{2}PA \cdot BK}{\frac{1}{2}PA \cdot CK} = \dfrac{S_{BAP}}{S_{CAP}}$.

Решение основной задачи. Пусть BC и PA — произвольные скрещивающиеся ребра тетраэдра (рис. 32, *а*). Попытаемся данную задачу свести к предыдущей задаче. Как и раньше, построим линейный угол двугранного угла при ребре PA. Для этого в грани BAP через вершину B проведем перпендикуляр BK к ребру PA. Далее через точку K в грани CAP проведем перпендикуляр к PA. Ортогонально спроектируем точки L и C на плоскость построенного линейного угла, получим соответственно точки L_1 и C_1. Рассмотрим тетраэдр $PABC_1$. В нем $BC_1 \perp PA$, и, значит, к нему можно применить результат вспомогательной задачи.

Так как LL_1 и CC_1 перпендикулярны плоскости линейного угла, то $LL_1 \parallel CC_1$. Тогда $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{BL_1}{L_1C_1}$. На основании результата вспомогательной задачи получаем, что $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{BL_1}{L_1C_1} = \dfrac{S_{BAP}}{S_{C_1AP}}$.

Осталось теперь заметить, что $S_{C_1AP} = S_{CAP}$. Треугольники CAP и C_1AP равновелики, так как у них общее основание PA и равные высоты, проведенные к этому основанию (учли, что $CC_1 \parallel PA$). Таким образом,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BL_1}{L_1C_1} = \frac{S_{BAP}}{S_{C_1AP}} = \frac{S_{BAP}}{S_{CAP}}.$$

Обращение к проблеме. Данная задача является стереометрическим аналогом используемого при ее решении свойства биссектрисы треугольника. Ниже будет приведено другое решение данной задачи — с помощью метода объемов.

Обозначения для следующих задач.

Пусть α — угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды,

β — угол наклона боковых граней к плоскости основания,

γ — плоский угол при вершине пирамиды,

δ — двугранный угол при боковом ребре.

47.

Доказать, что для правильной треугольной пирамиды справедливы следующие формулы (рис. 33):

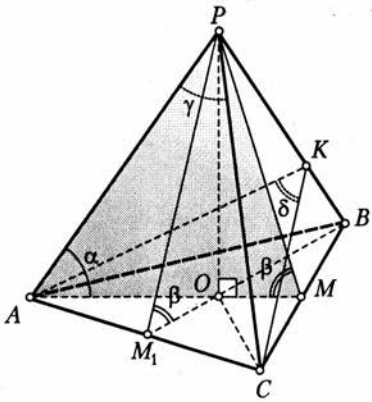


Рис. 33

1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$;

2) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\gamma}{2}$;

3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$;

4) $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$;

5) $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2}$;

6) $\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}$.

Решение.

1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{PO}{AO} = \frac{PM}{2OM} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$;

2) $$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{OA}{PA}\\ \sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{BM}{PB}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{OA}{PA}\cdot\frac{PB}{BM} = \frac{OA}{BM} = \frac{OB}{BM} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

3) $\left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\dfrac{KM}{AM}\\ \operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}=\dfrac{KM}{BM}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}}=\dfrac{KM}{AM}\cdot\dfrac{BM}{KM}=\dfrac{BM}{AM}=\operatorname{ctg}60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}};$

4) $\left.\begin{array}{l}\cos\beta=\dfrac{OM}{PM}\\ \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{BM}{PM}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\cos\beta}{\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}=\dfrac{OM}{PM}\cdot\dfrac{PM}{BM}=\dfrac{OM}{BM}=\operatorname{tg}30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}};$

5) $\left.\begin{array}{l}\sin\beta=\dfrac{PO}{PM_1}\\ \cos\dfrac{\delta}{2}=\dfrac{KM}{BK}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\sin\beta}{\cos\dfrac{\delta}{2}}=\dfrac{PO}{PM_1}\cdot\dfrac{BK}{KM}=\dfrac{PO}{KM}\cdot\dfrac{BK}{PM_1}=$

$$=\left(\frac{1}{AM}:\frac{1}{PA}\right)\cdot\left(\frac{1}{PA}:\frac{1}{AB}\right)=\frac{PA}{AM}\cdot\frac{AB}{PA}=\frac{AB}{AM}=\frac{1}{\sin60^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

При выводе данной формулы воспользовались планиметрическим предложением:

$$h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c};$$

6) $\left.\begin{array}{l}\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{PM}{PC}\\ \sin\dfrac{\delta}{2}=\dfrac{MC}{KC}\end{array}\right\}\Rightarrow\cos\dfrac{\gamma}{2}\cdot\sin\dfrac{\delta}{2}=\dfrac{PM}{PC}\cdot\dfrac{MC}{KC}=\dfrac{PM_1}{KC}\cdot\dfrac{MC}{PC}=$

$$=\left(\frac{1}{AC}:\frac{1}{PA}\right)\cdot\frac{MC}{PC}=\frac{PA}{AC}\cdot\frac{MC}{PC}=\frac{MC}{AC}=\cos60^\circ=\frac{1}{2}.$$

При выводе рассматриваемой формулы был применен предыдущий прием.

50, *а.*

Краткая запись задачи:
$PABC$ — трехгранный угол (рис. 34),
$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=\alpha$, M лежит внутри трехгранного угла,
$MM_1=MM_2=MM_3=a$ — расстояния от точки M до граней угла $PABC$.

PM — ?

Выполнение рисунка. Строим трехгранный угол $PABC$, точку M, перпендикуляры MM_1, MM_2 и MM_3 к граням угла $PABC$. Точки M_1, M_2 и M_3 соединим друг с другом и с точками M и P отрезками. В результате по-

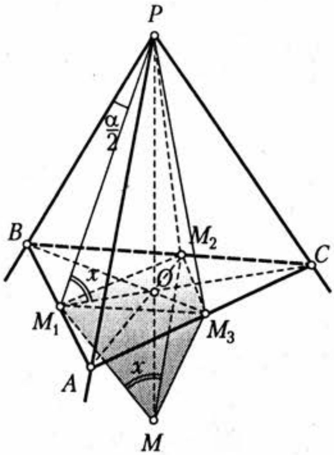


Рис. 34

лучим две пирамиды $MM_1M_2M_3$ и $PM_1M_1M_3$ с общим основанием $M_1M_2M_3$. Так как точка M равноудалена от граней трехгранного угла, то она принадлежит биссектрисе этого угла. Поэтому PM — биссектриса трехгранного угла $PABC$. Плоские углы трехгранного угла равны, поэтому биссекторы двугранных углов с ребрами PA, PB и PC пересекают противоположные грани трехгранного угла по биссектрисам плоских углов. Значит, PM_1, PM_2 и PM_3 — биссектрисы плоских углов данного трехгранного угла. Кроме того, так как $MM_1 \perp PAB$, то $MM_1 \perp PM_1$, т. е. треугольник PMM_1 — прямоугольный с известным катетом $MM_1 = a$ и искомой гипотенузой PM.

Замысел решения. Больше всего данных элементов имеется в пирамиде $MM_1M_2M_3$: она правильная, так как основание $M_1M_2M_3$ — правильный треугольник и равны ее боковые ребра MM_1, MM_2 и MM_3, причем $MM_1 = a$. Необходимо найти некоторый угловой элемент этой пирамиды. Однако непосредственно перейти от данного плоского угла α трехгранного угла $PABC$ к некоторому углу пирамиды $MM_1M_2M_3$ представляется довольно сложно. Возникает предположение о необходимости рассмотрения вспомогательной пирамиды. Для этого построим пересечение плоскости $M_1M_2M_3$ с гранями данного трехгранного угла — треугольника ABC. В результате получим пирамиду $PABC$. Нельзя ли воспользоваться этой пирамидой для установления связи между углом M_1MP, равным x, и данным углом α?

50, *в.*

Краткая запись задачи:
$PABCD$ — четырехугольная пирамида,
$PA = PB = PC = PD$,
$\angle APB = \angle CPD = \alpha$,
$\angle APD = \angle BPC = \beta$,
H — высота пирамиды (рис. 35).

$S_{бок}$ — ?

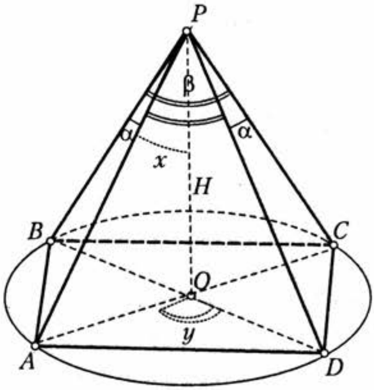


Рис. 35

Выполнение и анализ рисунка. Пусть PO — высота пирамиды. Так как боковые ребра пирамиды равны, то $OA = OB = OC = OD$, т. е. около основания пирамиды можно описать окружность. Из равенства треугольников PBC и PAD, PAB и PCD следует, что $BC = AD$ и $AB = DC$. Значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Параллелограмм, около которого описана окружность, является прямоугольником. Точка O — точка пересечения его диагоналей. Решение задачи сводится к нахождению бокового ребра пирамиды.

Замысел решения. Желательно найти $\angle APO = x$, входящий с отрезком $PO = H$ в один прямоугольный треугольник — треугольник APO. После этого можно найти боковое ребро пирамиды и воспользоваться формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Конкретизация замысла решения. Нельзя ли воспользоваться обобщенной формулой Эйлера? Применим эту формулу дважды. Один раз к углам APD и AOD, другой раз — к углам APB и AOB.

Занятие 13. Сфера и шар. Сечение сферы плоскостью

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 10.3 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 52, а—г из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 53; 54 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

53, *а.*

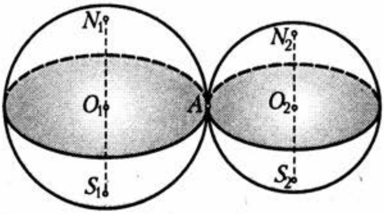


Рис. 36

Краткая запись задачи:
O_1 и O_2 — центры двух касающихся шаров,
A — точка касания,
R_1 и R_2 — радиусы шаров (рис. 36).

Доказать: 1) точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой;
2) $O_1O_2 = R_1 + R_2$ или $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$.

Замысел решения. Попытаемся решение задачи свести к аналогичной планиметрической задаче о касающихся окружностях.

Решение. 1) Пусть A — точка касания, O_1 и O_2 — центры данных шаров. Через точки O_1, O_2 и A проведем плоскость O_1O_2A. Эта плоскость пересечет поверхности шаров по окружностям. Построенные окружности лежат в одной плоскости и кроме точки A других общих точек не имеют (в противном случае данные сферы имели бы более одной общей точки). Значит, эти окружности касаются друг друга в точке A. Центры окружностей находятся в точках O_1 и O_2. Согласно планиметрической задаче точка A лежит на линии центров O_1O_2. Таким образом, доказано, что точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой.

2) Если шары касаются внешним образом, то $O_1O_2 = R_1 + R_2$; если имеет место внутреннее касание, то $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$.

53, *б.*

Краткая запись задачи:
O_1 и O_2 — центры двух касающихся шаров,
A — точка касания,
α — плоскость, проходящая через O_1 и O_2 (см. рис. к задаче 53, а).

Доказать: $A \in \alpha$.

Замысел решения. Воспользуемся результатом предыдущей задачи.

Решение. В задаче 53, а доказано, что $A \in O_1O_2$. Поэтому

$$(A \in O_1O_2 \text{ и } O_1O_2 \subset \alpha) \Rightarrow A \in \alpha.$$

Занятие 14. Конус

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 11.2 теоретической части пособия для учащихся.

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 56; 57 из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 59 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

59, *а.*

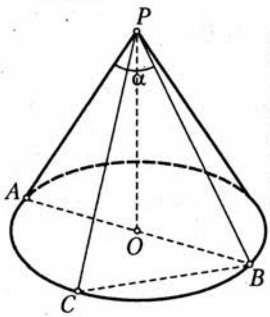


Рис. 37

Краткая запись задачи:
R — радиус основания равностороннего конуса,
α — угол между образующими PA и PB (рис. 37).

1) $S_{\Delta PBC}$ — ? 2) В каких границах изменяется угол α? 3) $\max S_{\Delta PBC}$ — ?

Решение. Найдем вначале образующую конуса. Для этого рассмотрим треугольник PAB, получаемый в осевом сечении конуса. Так как конус равносторонний, то $PA = PB = AB = 2R$. После этого можно найти площадь треугольника PBC:

$$S_{\Delta PBC} = \frac{1}{2} PB \cdot PC \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \sin\alpha = 2R^2 \sin\alpha.$$

Угол α не может быть больше угла APB. Поэтому, учитывая, что $\angle APB = 60°$, приходим к следующим границам для угла α: $0° < \alpha < 60°$.

Наибольшее значение площади треугольника PBC будет соответствовать наибольшему значению $\sin\alpha$ и, следовательно, наибольшему значению $\alpha = 60°$. Поэтому

$$\max S_{\Delta PBC} = 2R^2 \sin 60° = 2R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R^2\sqrt{3}.$$

В этом случае треугольник PBC займет положение треугольника PAB.

59, *б.*

Краткая запись задачи:
S — площадь сечения конуса, проходящего через его вершину,
Q — площадь осевого сечения,
а) угол при вершине осевого сечения острый или прямой;
б) угол при вершине осевого сечения тупой (см. рис. 37).

Доказать:
1) $\max S = Q$;
2) $\max S = S_1$, где S_1 — площадь сечения, проходящего через перпендикулярные образующие.

Решение. В обозначениях предыдущей задачи имеем:

1) $\max S = \max\left(\frac{1}{2}PC \cdot PB\sin\alpha\right) = \frac{1}{2}PA \cdot PB\sin\angle APB = Q$;

2) $\max S = \max\left(\frac{1}{2}PC \cdot PB\sin\alpha\right) = S_1$.

Последнее утверждение следует из того, что угол α, изменяясь от угла, равного 0°, до тупого угла, примет значение, равное 90°. При этом значении α площадь S окажется максимальной.

59, *в.*

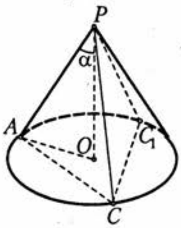


Рис. 38

Краткая запись задачи:
H — высота конуса,
α — угол между высотой и образующей (рис. 38).

1) Найти $S_{сеч}$, проведенного через две перпендикулярные образующие.
2) В каких границах может изменяться угол α?
При каком значении α будет $\min S_{сеч}$?
3) Как в этом случае построить конус и его сечение?

Решение. а) Если угол при вершине осевого сечения меньше 90° ($2\alpha < 90°$), то задача не имеет решения, так как такое сечение невозможно;

б) если $\angle APB = 90°$ ($2\alpha = 90°$), то ΔAPB — искомое сечение. Поэтому

$$\frac{H}{PA} = \cos\alpha \Rightarrow PA = \frac{H}{\cos\alpha} \Rightarrow S_{сеч} = \frac{1}{2}PA \cdot PB = \frac{1}{2}\frac{H^2}{\cos^2\alpha};$$

в) если $\angle APB > 90°$ $(90° < 2\alpha < 180°)$, то существуют две перпендикулярные образующие PA и PC. В этом случае искомым сечением является треугольник APC. Его площадь также находится по формуле

$$S_{сеч} = \frac{1}{2}\frac{H^2}{\cos^2\alpha};$$

г) угол α — острый, поэтому его значения изменяются в границах: $0° < \alpha < 90°$.

Для того чтобы задача имела решение, необходимо выполнение условия: $90° < 2\alpha < 180°$.

Учитывая полученную выше формулу площади сечения, можно прийти к выводу о том, что наименьшее значение площади будет иметь место при наибольшем значении $\cos^2\alpha$, т. е. при наибольшем значении $\cos\alpha$ и, значит, при наименьшем значении α.

Наименьшее значение α, при котором задача имеет решение, равно 45°. Поэтому

$$\min S_{сеч} = \min \frac{1}{2}\frac{H^2}{\cos^2\alpha} \Rightarrow S_{сеч} = \frac{1}{2}\frac{H^2}{\cos^2 45°} = \frac{2H^2}{2} = H^2;$$

д) теперь можно ответить на вопрос о том, как построить конус, в котором искомое сечение имеет наименьшую площадь. В этом случае $\alpha = 45°$, $OA = H$. Поэтому строим основание конуса радиусом, равным H. Через центр круга проводим перпендикуляр к его плоскости. На нем откладываем высоту конуса H. Конус с построенной вершиной P и основанием — искомый, его осевое сечение PAB — искомое сечение, проходящее через две перпендикулярные образующие.

Занятие 15. Конус

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 58; 60 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 61; 63, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 64 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (из оставшихся задач две на выбор).

Занятие 16. Комбинации многогранников и тел вращения

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 12.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 65, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 65, в—и из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

65, *а.*

Краткая запись задачи:
R — радиус шара, описанного около правильной пирамиды,
r — радиус окружности, описанной около основания,
H — высота пирамиды (рис. 39).

Доказать: $R = \dfrac{r^2 + H^2}{2H}$.

Выполнение рисунка. Основание пирамиды изображаем в виде многоугольника, вписанного в параллель шара. Вершина пирамиды находится в полюсе P шара. Центр O шара находится на прямой PO_1. При этом возможны три случая:

а) точка O_1 находится на продолжении отрезка PO за точку O (рис. 39, *а*);

б) точка O_1 лежит на отрезке PO (рис. 39, *б*);

в) точка O_1 совпадает с точкой O (в этом случае параллелью, в которую вписано основание пирамиды, является экватор; рис. 39, *в*).

Для решения задачи необходимо построить треугольник, в который бы входили данные и искомый элементы.

Замысел решения. Выполнение дополнительного построения, приводящего к указанному треугольнику, — ключ к решению задачи. Как выполнить такое построение? Желательно, чтобы в него входили отрезки

R, r и отрезок, который можно было бы выразить через H. Таким треугольником может быть треугольник OO_1A. В нем $OA = R$, $O_1A = r$ и $OO_1 = H - R$ (см. рис. 39, *а*). На рисунке 39, *б* $OO_1 = R - H$, на рисунке 39, *в* $OO_1 = 0$. В случае *в* брать какой-либо треугольник не нужно. В этом случае непосредственно получаем, что $R = H$. В первых двух случаях, пользуясь теоремой Пифагора, составляем равенства, связывающие R, r и H.

Вычисления. В первом случае приходим к равенству

$$R^2 = r^2 + (H - R)^2,$$

во втором случае — к равенству

$$R^2 = r^2 + (R - H)^2.$$

Оба равенства приводят к одному и тому же результату: $R = \dfrac{r^2 + H^2}{2H}$.

В третьем случае, как отмечалось, $R = H$. Убедимся, что и в этом случае формула для R остается справедливой. В самом деле, так как $R = r = H$, то, применяя формулу, получим:

$$R = \frac{r^2 + H^2}{2H} = \frac{H^2 + H^2}{2H} = H.$$

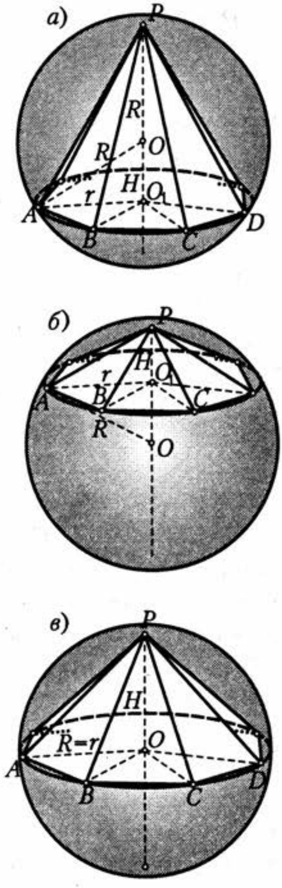


Рис. 39

65, *б*.

Краткая запись задачи:
R — радиус шара, описанного около правильного тетраэдра,
a — ребро тетраэдра (рис. 40).

Доказать: $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Замыслы решения. 1) Данную задачу можно решить точно так же, как и предыдущую: построить треугольник OO_1A со сторонами $AO = R$, $AO_1 = r$, $OO_1 = H - R$, выразить r и H через a, применить теорему Пифагора к треугольнику OO_1A.

2) Проще воспользоваться результатом задачи 65, а.

Решение.

Имеем: $r=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Тогда, следуя второму замыслу, получим:

$$R=\frac{\left(\frac{a^2}{3}+\frac{2a^2}{3}\right)\cdot 3}{2a\sqrt{6}}=\frac{3a}{2\sqrt{6}}.$$

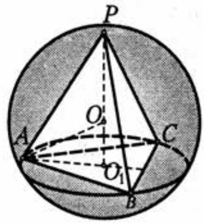


Рис. 40

65, *г.*

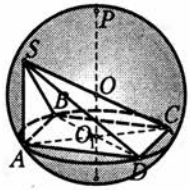


Рис. 41

Краткая запись задачи:
$SABCD$ — пирамида (рис. 41),
$ABCD$ — прямоугольник,
$AB = a$, $AD = b$, $SA \perp ABCD$,
$\angle SCA = \alpha$.

R — ?

Выполнение рисунка. Строим шар, его параллель, вписываем в параллель прямоугольник $ABCD$. Из центра O_1 параллели проводим прямую, перпендикулярную ее плоскости. Центр O шара лежит на этой прямой. Ребро SA, будучи перпендикулярным плоскости $ABCD$, будет параллельно прямой O_1O. Ребро SC — большее боковое ребро, и так как CA — проекция SC на плоскость $ABCD$, то угол SCA — угол между ребром SC и плоскостью основания пирамиды: $\angle SCA = \alpha$.

Анализ рисунка, замысел решения. Так как $OO_1 \parallel AS$, то OO_1 и, значит, центр O лежат в плоскости треугольника SAC. Так как вершины треугольника SAC лежат на сфере и плоскость этого треугольника содержит центр шара, то окружность, описанная около треугольника SAC, является окружностью большого круга. Центр этой окружности совпадает с центром O шара и, учитывая, что треугольник SAC — прямоугольный, находится в середине гипотенузы SC. Таким образом, решение задачи сводится к нахождению ребра SC.

Вычисления. 1) Находим диагональ AC прямоугольника $ABCD$:

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+b^2};$$

2) из прямоугольного треугольника SAC имеем:

$$\frac{AC}{SC}=\cos\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2R}=\cos\alpha \Rightarrow R=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\cos\alpha}.$$

Примечание. Вычисления можно провести несколько иначе:

1) Найдем вначале из треугольника SAC катет SA: $SA = \sqrt{a^2 + b^2}\ \mathrm{tg}\,\alpha$;

2) из треугольника SAC по теореме Пифагора

$$SC = \sqrt{(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)\mathrm{tg}^2\alpha} = \sqrt{(a^2 + b^2)(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)};$$

3) отсюда $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)}$.

Учитывая, что $1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, придем к прежнему ответу.

65, *д.*

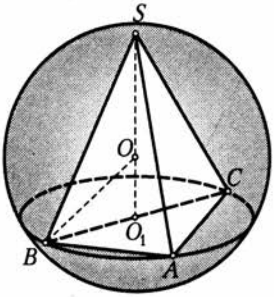


Рис. 42

Краткая запись задачи:
$DABC$ — основание пирамиды (рис. 42),
$\angle A = 90°$,
$AB = a, AC = b$,
$SA = SB = SC = c$ — боковые ребра.

Найти R — радиус описанного шара.

Выполнение рисунка. Строим шар, параллель с центром O_1, вписываем в эту параллель прямоугольный треугольник ABC так, чтобы гипотенуза BC проходила через точку O_1. Так как вершина S пирамиды равноудалена от вершин основания, то она ортогонально проектируется в центр O_1 окружности, описанной около основания. Пусть O — центр шара. Тогда OO_1 перпендикулярна плоскости параллели. Так как O_1S и O_1O — два перпендикуляра к одной плоскости, то прямые O_1S и O_1O совпадают. Значит, $O \in SO_1$.

Анализ рисунка, замысел решения. Необходимо построить треугольник, в который бы входили данные и искомый элементы. Для этого проведем радиус шара OB. Выясните, не подходит ли для этой цели треугольник OO_1B.

Вычисления. 1) Найдем BO_1 как половину гипотенузы BC треугольника ABC:

$$BO_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2};$$

2) найдем высоту пирамиды SO_1 из прямоугольного треугольника SO_1B:

$$SO_1 = \sqrt{c^2 - \frac{a^2 + b^2}{4}};$$

3) тогда $OO_1 = \sqrt{c^2 - \dfrac{a^2 + b^2}{4}} - R$;

4) применим к треугольнику OO_1B теорему Пифагора:

$$R^2 = \frac{a^2+b^2}{4} + \left(\sqrt{c^2 - \frac{a^2+b^2}{4}} - R\right)^2 \Rightarrow R = \frac{c^2}{\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}}.$$

Примечание. Обратим внимание на то, что использование треугольника OO_1B, сторонами которого являются радиус описанного шара, радиус окружности, описанной около основания, и отрезок OO_1, служит своего рода эвристическим приемом, помогающим при решении многих задач на комбинацию пирамиды с описанным шаром.

Занятие 17. Комбинации многогранников и тел вращения

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 66, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».

66, *б.*

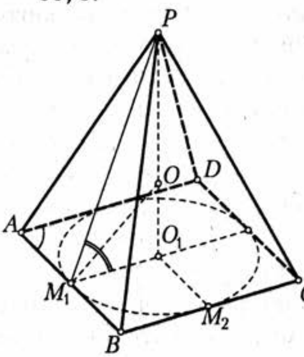


Рис. 43

Краткая запись задачи:
$PABCD$ — пирамида (рис. 43),
$ABCD$ — ромб,
$AB = a$, $\angle BAD = \alpha$,
β — угол наклона боковых граней к плоскости основания.

Найти R — радиус вписанного шара.

Выполнение рисунка. Построение рисунка можно провести в такой последовательности. Вначале строим окружность с центром O_1, затем — ромб $ABCD$, описанный около этой окружности. Далее через точку O_1 проводим $O_1P \perp ABCD$, P — вершина пирамиды, соединяем ее с вершинами основания. На этом построения пирамиды закончены.

Построим теперь центр вписанного шара. Пусть M_1 — точка касания окружности с центром O_1 и стороны AB. Тогда $O_1M_1 \perp AB$ и по теореме о трех перпендикулярах $PM_1 \perp AB$. Значит, угол PM_1O_1 — линейный угол двугранного угла при ребре AB. Проведем биссектрису этого угла. Точка пересечения построенной биссектрисы с высотой PO_1 пирамиды — точка O — искомый центр вписанного шара.

Замысел решения. Воспользуемся треугольником OO_1M. Этот треугольник прямоугольный, в нем $OO_1 = R$ — искомый радиус, O_1M_1 — радиус окружности, вписанной в основание, и $\angle OM_1O_1 = \frac{\beta}{2}$.

Вычисления. 1) Замечаем, что высота ромба равна диаметру вписанной в него окружности. Если высоту ромба обозначить буквой h, а радиус вписанной окружности — буквой r, то

$$\frac{h}{a} = \sin\alpha \Rightarrow h = 2r = a\sin\alpha \Rightarrow r = \frac{a\sin\alpha}{2}$$

(проведите высоту ромба из вершины D на сторону AB);

2) из треугольника OO_1M

$$\frac{R}{r} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \Rightarrow R = r\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{2}.$$

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 66, г—е из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 67 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

66, *г.*

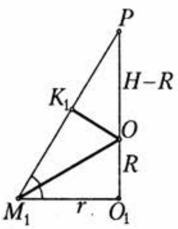


Рис. 44

Краткая запись задачи:
$PABC$ ... — правильная пирамида (рис. 44),
R — радиус шара, вписанного в пирамиду,
H — высота пирамиды,
r — радиус окружности, вписанной в основание.

Доказать: $R = \frac{Hr}{r + \sqrt{H^2 + r^2}}$.

Решение. Рассмотрим треугольник PO_1M_1.

Так как $OO_1 = R$, $O_1M_1 = r$, $PO_1 = H$ и M_1O — биссектриса угла PM_1O_1, то по свойству биссектрисы

$$\frac{OO_1}{OP} = \frac{O_1M_1}{PM_1} \Rightarrow \frac{R}{H-R} = \frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}} \Rightarrow R = \frac{Hr}{r+\sqrt{H^2+r^2}}.$$

67, *г.*

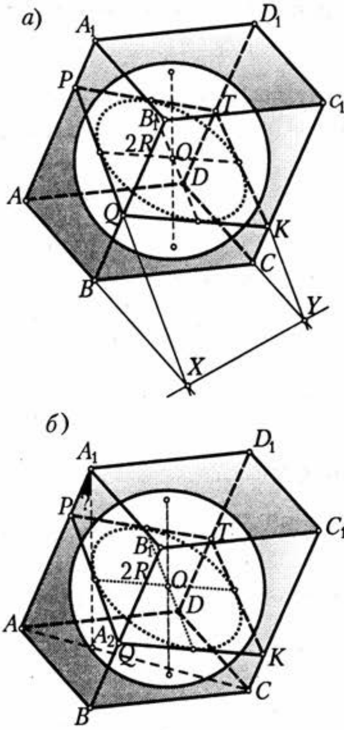


Рис. 45

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — четырехугольная призма,
$ABCD$ — ромб (рис. 45),
$AB = a$, $\angle BAD = \alpha$, квадрат $PQKT$ — перпендикулярное сечение,
R — радиус вписанного шара.

Найти угол между плоскостью перпендикулярного сечения и плоскостью.

Замыслы решения. 1) Воспользоваться формулой, связывающей между собой площади фигуры и ее ортогональной проекции на плоскость. С помощью этой формулы можно найти линейный угол между данными плоскостями. При этом самое главное — заметить, чему равна сторона квадрата, являющегося перпендикулярным сечением призмы. 2) Угол между плоскостями можно искать как угол между перпендикулярами, проведенными к этим плоскостям (рис. 45, *б*).

Выполнение рисунка. Строим сферу с центром O и радиусом R. Проводим окружность большого круга (радиуса $2R$). Вокруг этой окружности описываем квадрат $PQKT$. Через вершины квадрата проводим наклонные параллельные прямые, на которых лежат боковые ребра призмы. Через полюсы шара проводим касательные к шару плоскости. Эти плоскости, пересекаясь с построенными параллельными прямыми, дают вершины оснований призмы. Далее строим прямую пересечения плоскостей $ABCD$ и $PQKT$: $X = AB \cap PQ$, $Y = DC \cap TK$, прямая XY — искомая прямая пересечения (рис. 45, *а*).

Анализ рисунка. Решим задачу с учетом первого замысла. Так как плоскость $PQKT$ перпендикулярна боковым ребрам призмы, то квадрат $PQKT$ можно представить как ортогональную проекцию ромба $ABCD$. Площади квадрата и ромба найти сравнительно нетрудно (сторона квадрата равна $2R$). Тогда искомый угол x можно найти, воспользовавшись формулой $S_{\text{пр}} = S\cos x$, где S — площадь данной фигуры, $S_{\text{пр}}$ — площадь проекции данной фигуры, x — угол между плоскостью, в которой лежит данная фигура, и плоскостью проекций (проектирование ортогональное).

Вычисления. Так как площадь основания призмы равна $a^2\sin\alpha$, а площадь ортогональной проекции этого основания на плоскость перпендикулярного сечения равна $4R^2$, то $4R^2 = a^2\sin\alpha\cos x$.

Отсюда $\cos x = \dfrac{4R^2}{a^2\sin\alpha}$, $x = \arccos\dfrac{4R^2}{a^2\sin\alpha}$.

Указание. Попробуйте реализовать второй замысел. Какое решение вам покажется проще?

Занятие 18. Комбинации многогранников и тел вращения

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 68, а—в из раздела «Задания для самостоятельной работы».

68, *б.*

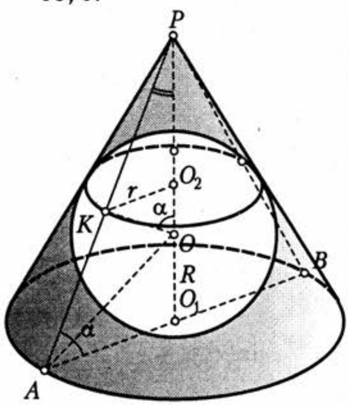


Рис. 46

Краткая запись задачи:
l — образующая конуса (рис. 46),
α — угол между образующей и плоскостью основания.

Найти:
R — радиус вписанного шара;
C — длину окружности касания шара и конуса.

Выполнение рисунка. Строим шар с центром O и полюсом O_1. На прямой O_1O откладываем отрезок O_1P — высоту конуса. Через вершину P конуса проводим касательные PA и PB к очерковой окружности шара. Через точку O_1 проводим $AB \perp PO_1$. Отрезок AB — диаметр основания конуса. По диаметру AB строим окружность основания конуса. Отмечаем точку K — точку касания шара с образующей PA. По условию $PA = l$, $\angle PAO = \alpha$.

Анализ рисунка. Так как шар касается сторон треугольника PAB, то его радиусы OO_1 и OK перпендикулярны соответственно сторонам AB и PA этого треугольника. Из равенства прямоугольных треугольников OO_1A и OKA (они равны по катету и гипотенузе) следует, что $\angle OAO_1 = \frac{\alpha}{2}$. Радиус шара $R = OO_1$ можно попытаться найти из прямоугольного ΔOO_1A.

Для нахождения радиуса $r = O_2K$ окружности, по которой шар касается боковой поверхности конуса, представляет интерес треугольник OO_2K. Так как образующая PA касается шара, то $OK \perp PA$. Кроме того, плоскость параллели с центром O_2 перпендикулярна высоте PO_1 конуса. Поэтому $O_2K \perp PO_1$ и, значит, $\angle KO_2O = 90°$. Прямоугольные треугольники PAO_1 и PKO имеют общий угол при вершине P.

Отсюда $\angle POK = \angle PAO_1 = \alpha$.

Отыскание радиуса шара.

1) Найдем AO_1 из треугольника PO_1A:

$$\frac{AO_1}{l} = \cos\alpha \Rightarrow AO_1 = l\cos\alpha;$$

2) из этого же треугольника найдем PO_1:

$$\frac{PO_1}{l} = \sin\alpha \Rightarrow PO_1 = l\sin\alpha;$$

3) из треугольника AOO_1:

$$\frac{OO_1}{AO_1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{R}{l\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow R = l\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Отыскание длины окружности.

1) Так как $\angle O_2OK = \angle PAO_1 = \alpha$, то $\Delta KO_2O \sim \Delta PO_1A$;

2) из подобия этих треугольников получаем:

$$\frac{KO_2}{PO_1} = \frac{KO}{PA} \Rightarrow \frac{r}{l\sin\alpha} = \frac{l\cos\alpha}{l} \Rightarrow r = \frac{1}{2}l\sin2\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

3) следовательно, $C = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{1}{2}l\sin2\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pi l\sin2\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 68, г—е из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 69; 71 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

68, *е*.

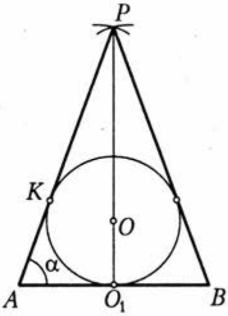


Рис. 47

Краткая запись задачи:
Q — площадь осевого сечения конуса (рис. 47),
α — угол между образующей и плоскостью основания.

Найти R — радиус вписанного шара.

Замысел решения. В задаче 68, б радиус вписанного шара находился по образующей l конуса и углу α между образующей и плоскостью основания. Угол α дан и в данной задаче. Если теперь найти l, то для нахождения R можно воспользоваться формулой, полученной при решении задачи 68, б. Итак, попытаемся свести данную задачу к задаче 68, б.

Конкретизация замысла решения. Рассмотрим осевое сечение конуса с вписанной в него окружностью большого круга. Так как треугольник PAB равнобедренный, то $\angle P = 180° - 2\alpha$. Тогда площадь этого треугольника можно выразить по формуле $Q = \frac{1}{2}l^2\sin(180° - 2\alpha)$.

Вычисления. 1) Найдем l, записав площадь треугольник PAB:

$$\frac{1}{2}l^2\sin(180° - 2\alpha) = Q \Rightarrow l^2 = \frac{2Q}{\sin 2\alpha} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{2Q}{\sin 2\alpha}};$$

2) применим формулу, полученную при решении задачи 68, б:

$$R = \sqrt{\frac{2Q}{\sin 2\alpha}} \cdot \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2Q\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{Q}{\operatorname{tg}\alpha}}.$$

Занятие 19. Части сферы и шара. Правильные многогранники

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 13.2 теоретической части пособия для учащихся.
Задачи 1—3 из п. 14.2 теоретической части пособия для учащихся.

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 70; 72, а из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 72, в; 73 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

70, *а.*

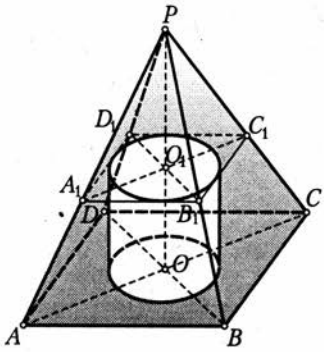


Рис. 48

Около данного цилиндра описать правильную четырехугольную пирамиду, высота которой вдвое больше высоты цилиндра (рис. 48).

(Нижнее основание цилиндра принадлежит нижнему основанию пирамиды, а верхнее основание цилиндра имеет с каждой боковой гранью пирамиды одну общую точку.)

Поиск решения (анализ). Допустим, что задача решена и около данного цилиндра описана требуемая пирамида. Выясним, какими свойствами обладает эта комбинация тел, как этими свойствами воспользоваться для ее построения.

По условию $PO = 2OO_1$. В сечении боковой поверхности пирамиды плоскостью верхнего основания цилиндра получается квадрат, гомотетичный квадрату $ABCD$. Центр этой гомотетии находится в точке P. Возможно построение пирамиды начать с построения этого квадрата, получающегося в сечении? Как его построить? Для этого учтем, что квадрат $A_1B_1C_1D_1$ должен быть описан около верхнего основания цилиндра. Итак, предположим, построен цилиндр с высотой OO_1, на продолжении высоты цилиндра откладываем отрезок $OP = 2OO_1$. Получили вершину P пирамиды. Далее около верхнего основания цилиндра описали квадрат $A_1B_1C_1D_1$. Как дальше продолжить построение пирамиды?

Воспользуемся гомотетией с центром P и парой гомотетичных точек $O_1 \to O$. Построив точки, гомотетичные точкам A_1, B_1, C_1 и D_1 в указанной гомотетии, получим вершины основания $ABCD$. Так как отрезки PA, PB, PC и PD окажутся уже построенными, то построение пирамиды $PABCD$ завершено.

В результате приходим к следующему плану.

План построений. Строим:

1) цилиндр с центрами оснований O и O_1;

2) отрезок $OP = 2OO_1$;

3) квадрат $A_1B_1C_1D_1$, описанный около верхнего основания цилиндра;

4) квадрат $ABCD$, гомотетичный квадрату $A_1B_1C_1D_1$ в гомотетии с центром P и парой гомотетичных точек $O_1 \to O$.

Пирамида $PABCD$ — искомая.

Дополнительное задание. «Обратите» предыдущую задачу: пусть данной является правильная четырехугольная пирамида, а требуется построить вписанный в нее цилиндр, высота которого вдвое меньше высоты пирамиды. Решите эту задачу.

70, *в.*

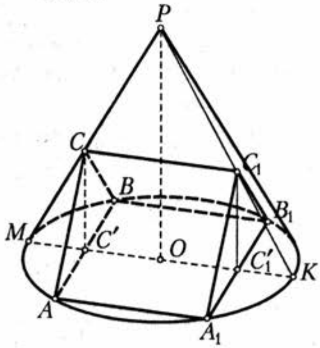


Рис. 49

Краткая запись задачи:
$ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны a (рис. 49); четыре вершины призмы лежат на окружности основания конуса и две вершины — на боковой поверхности конуса.

Найти PO — высоту конуса.

Интуитивное осознание геометрической ситуации. Замечаем, что призма располагается таким образом, что ее боковая грань вписана в основание конуса. Пусть этой гранью является грань AA_1B_1B. Концы третьего бокового ребра должны лежать на боковой поверхности конуса. Проводим $CC_1 \parallel AA_1$. Показываем, что C принадлежит образующей PM, C_1 — образующей PK. Точку C соединяем отрезками с точками A и B, точку C_1 — с точками A_1 и B_1. В итоге приходим к искомому рисунку. Пространственные представления подсказывают, что треугольник PMK является осевым сечением конуса и PO пересекает ребро призмы CC_1.

Анализ рисунка. Уточним выполненный рисунок, проверим сделанные выше предположения. Рассмотрим плоскость POC_1 и выясним, каким образом она пересекает поверхности конуса и призмы. Эта плоскость пересекает боковую поверхность конуса по образующей PK. Найдем теперь линию пересечения плоскости POC_1 (или все равно что плоскости POK) с основанием $A_1B_1C_1$. Так как основание $A_1B_1C_1$ перпендикулярно боковой грани AA_1B_1B и эта грань лежит в плоскости основания конуса, то основание $A_1B_1C_1$ перпендикулярно основанию конуса. Тогда две плоскости POK и $A_1B_1C_1$, перпендикулярные основанию конуса, пересекаются по прямой, перпендикулярной основанию конуса. Эта линия пересечения должна быть перпендикулярна прямой A_1B_1. Отрезок C_1C_1' этой линии является высотой треугольника $A_1B_1C_1$, и так как $C_1A_1 = C_1B_1$, то C_1' — середина отрезка A_1B_1.

Если рассмотреть аналогичным образом секущую плоскость POC, то получим, что она пересекает боковую поверхность конуса по образующей PM, а основание ABC призмы — по медиане CC'.

Учитывая, что точки C', O и C_1' лежат на одном отрезке (на «средней» линии квадрата ABB_1A_1), приходим к совпадению плоскостей POK и POM. Отрезок $CC_1 \subset PMK$ и $PO \otimes CC_1$.

Замыслы вычислений. 1) На рисунке имеется несколько пар подобных треугольников, которые могут быть использованы для вычисления высоты конуса. Одной такой парой являются треугольники PMK и PCC_1. (Так как $CC_1 \| MK$, то эти треугольники подобны по двум углам);

2) нахождение PO можно связать также с парой подобных треугольников POK и $C_1C_1'K$.

Тема 3 ОБЪЕМЫ ТЕЛ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ: ИСПОЛЬЗУЕМ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Занятие 20. Понятие объема тела. Объем произвольного прямого цилиндра — новое применение аксиоматического метода

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задача 1 из п. 16.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 2; 3 из п. 16.2 теоретической части пособия для учащихся.
Индивидуальное задание: задачи 75 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

75, *д.*

Краткая запись задачи:
$V_1 = V_2$ — объемы двух цилиндров,
$S_1 = S_2$ — площади разверток их боковых поверхностей.

Доказать равенство данных цилиндров.

План решения. Обозначим через R_1, H_1 и R_2, H_2 — радиусы оснований и высоты данных цилиндров. Запишем условия равенства объемов и площадей боковых поверхностей. Из этих равенств попытаемся установить, что $R_1 = R_2$ и $H_1 = H_2$.

Решение.

Имеем:

1) $\begin{cases} V_1 = V_2, \\ S_1 = S_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi R_1^2 H_1 = \pi R_2^2 H_2, \\ 2\pi R_1 H_1 = 2\pi R_2 H_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1^2 H_1 = R_2^2 H_2, \\ R_1 H_1 = R_2 H_2 \end{cases} \Rightarrow R_1 = R_2;$

2) $\begin{cases} R_1 H_1 = R_2 H_2, \\ R_1 = R_2 \end{cases} \Rightarrow H_1 = H_2$;

3) из п. 1 и 2 следует равенство данных цилиндров.

Занятие 21. Понятие объема тела. Объем произвольного прямого цилиндра

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 74; 76 из раздела «Задания для самостоятельной работы»

76, *а.*

Краткая запись задачи:
$ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма, вписанная в цилиндр,
ΔABC — прямоугольный,
M — середина BC, $A_1M = l$,
α — угол между отрезком A_1M и плоскостью ABC.

1) Задаются ли этими данными цилиндр и призма?
2) Найти объем призмы (если это возможно).

План решения и ***решение***. В задаче не сказано, какой угол треугольника ABC прямой. Поэтому придется рассмотреть различные случаи. Пусть $\angle A = 90°$. Тогда гипотенуза BC является диаметром окружности основания цилиндра и точка M — центром этой окружности. Из прямоугольного треугольника A_1AM ($A_1M = l$, $\angle A_1MA = \alpha$) можно найти высоту цилиндра и радиус основания: $AA_1 = l\sin\alpha$, $R = AM = l\cos\alpha$. В этом случае данные задачи цилиндр определяют.

Основание призмы при этом остается неопределенным (прямоугольный треугольник одной своей гипотенузой не задается).

В итоге данные задачи призму не определяют и их недостаточно для нахождения объема призмы.

Если BC является катетом, то можно найти медиану треугольника ABC, проведенную к этому катету. Знание медианы AM не позволяет отыскать радиус основания цилиндра и площадь треугольника ABC. Цилиндр и призма оказываются неопределенными. И в этом случае данных для нахождения объема призмы недостаточно.

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 77 из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 78—83 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

78, *а.*

Краткая запись задачи:
$ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма,
h — расстояние между ребром AA_1 и гранью BB_1C_1C.

1) Доказать: $V=\frac{1}{2}S_{BB_1C_1C}\cdot h$.

2) Сформулировать аналогичное планиметрическое предложение.

Замысел решения. Построим вначале отрезок, длина которого равна h — расстоянию между ребром AA_1 и гранью BB_1C_1C. Для этого из точки A проведем перпендикуляр к грани BB_1C_1C. (Выполните рисунок самостоятельно.) Так как грани ABC и BB_1C_1C перпендикулярны, то искомый перпендикуляр будет лежать в плоскости ABC и, значит, являться высотой треугольника ABC. Выполненные построения облегчают высказывание замысла решения. Нельзя ли воспользоваться формулой объема призмы $V=S_{осн}\,BB_1$ и преобразовать ее в искомую формулу?

Решение.
Имеем:

$$V=S_{осн}\,BB_1=\frac{1}{2}BC\cdot h\cdot BB_1=\frac{1}{2}BC\cdot BB_1\cdot h=\frac{1}{2}S_{BB_1C_1C}\cdot h.$$

Полученная формула аналогична планиметрической формуле площади треугольника, выражающей ее через сторону треугольника и высоту, проведенную к этой стороне.

83, *е.*

Краткая запись задачи:
Цилиндры с постоянным периметром развертки боковой поверхности.

Какой из этих цилиндров имеет наибольший объем?

Поисковые действия. 1) Естественно ввести обозначение для периметра разверток боковых поверхностей данных цилиндров. Пусть этот периметр обозначим буквой P. Тогда можно записать, что $P = 4\pi R + 2H$;

2) попытаемся выразить объем цилиндра $V = \pi R^2 H$ через P. (Получим: $V(R) = \frac{\pi P}{2} R^2 - 2\pi^2 R^3$);

3) для нахождения наибольшего значения функции $V(R)$ воспользуемся производной этой функции. (Убеждаемся в том, что точка $R = \frac{P}{6\pi}$ — критическая точка, в которой $V(R)$ принимает наибольшее значение);

4) по найденному значению R находим соответствующее значение H.

В итоге находятся размеры искомого цилиндра.

Занятие 22. Объем тела с известными площадями поперечных сечений — от производной объема к самому объему

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1; 2 из п. 17.3 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 85, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 85, в, г из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Занятие 23. Объем наклонной призмы

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 18.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 85, д—ж из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 85, з—л из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

85, *з.*

Краткая запись задачи:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, все ребра его равны a.
Одно из боковых ребер образует со смежными сторонами основания углы в 45°, острый угол основания равен 60°.

V — ?

Поиск решения. 1) Площадь основания можно найти сразу, применив формулу площади параллелограмма $S = ab \sin \alpha$;

2) дальнейшее решение задачи связано с нахождением высоты параллелепипеда;

3) уточним, о каком боковом ребре идет речь в задаче. Пусть $\angle BAD = 60°$. Тогда $\angle ADC = 120°$. Если допустить, что в задаче говорится о ребре AA_1, то получим трехгранный угол с вершиной A и плоскими углами 45°, 45° и 60°. Такой трехгранный угол возможен (в нем сумма двух плоских углов больше третьего плоского угла). Может ли ребро DD_1 образовывать со сторонами основания DA и DC углы в 45°? В этом случае окажется, что сумма двух плоских углов трехгранного угла с вершиной D (45° + 45°) меньше третьего плоского угла (120°). Такого трехгранного угла не существует. Значит, условия задачи косвенно определяют ребро AA_1;

4) построим высоту параллелепипеда, опущенную из вершины A_1. Какие условия при этом необходимо учесть? Учтем, что если $\angle A_1AB = \angle A_1AD$, то ребро AA_1 ортогонально проектируется на плоскость $ABCD$ в отрезок, лежащий на биссектрисе угол BAD. Примем во внимание также, что в ромбе биссектрисой угла A будет являться диагональ AC. Значит, ребро AA_1 ортогонально проектируется в некоторый отрезок AA_0, лежащий на диагонали AC основания. Отрезок A_1A_0 — искомая высота параллелепипеда;

5) для нахождения длины высоты A_1A_0 достаточно найти синус $\angle A_1AA_0$. Как это сделать? Нельзя ли вначале найти косинус этого угла? На основании формулы Эйлера можно записать:

$\cos\angle A_1AD = \cos\angle CAD \cdot \cos\angle A_1AA_0 \Rightarrow \cos 45° = \cos 30° \cdot \cos\angle A_1AA_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle A_1AA_0 \Rightarrow \cos\angle A_1AA_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \sin\angle A_1AA_0 = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$

6) из прямоугольного треугольника A_1AA_0, зная гипотенузу A_1A и синус угла A_1AA_0, можно найти $H = A_1A_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}$;

7) зная площадь основания и высоту параллелепипеда, находим его объем. (Выполните рисунок и завершите решение задачи самостоятельно.)

Занятие 24. Объем наклонной призмы

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 86 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 87, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 87, в—е из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

Занятие 25. Объем тела вращения: вначале производная объема, затем сам объем

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1; 2 из п. 19.2 теоретической части пособия для учащихся.
Задачи 1—3 из п. 20.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 88 из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 89, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».

88, б.

2) *Краткая запись задачи*:
Фигура $\Phi \subset xOy$ и ограничена в этой плоскости линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ и $y = 0$;
T — тело вращения, полученное при вращении фигуры Φ вокруг оси Ox.

$V_т$ — ?

Решение. По теореме об объеме тела вращения имеем:

1) $V'(x) = S(x) = \pi f^2(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$;

2) тогда $V(x) = \dfrac{\pi x^2}{2}$;

3) $V(2) = \dfrac{\pi \cdot 4}{2} = 2\pi$.

Ответ: $V_т = 2\pi$.

Занятие 26. Объем конуса и пирамиды

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 20.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 89, в—д из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 90 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (одну-две задачи на выбор).

90, *а.*

Краткая запись задачи:
V — объем конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду (рис. 50),
α — двугранный угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

Найти сторону основания пирамиды.

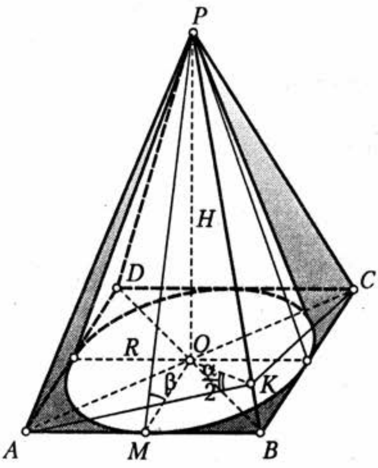


Рис. 50

Замысел решения. Вписываем конус в правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$, строим линейный $\angle AKC = \alpha$ двугранного угла с ребром PB. Прежде всего, замечаем, что искомая сторона основания пирамиды $x = 2R$, где R — радиус основания конуса. Задачу, таким образом, можно свести к нахождению R. Радиус R можно попытаться находить из формулы объема конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где V — данная величина. Но в эту формулу входит также H. Будем стремиться выразить H через R. Тогда R, а значит, и x окажутся выраженными через V.

Рационализирующий прием. Нельзя ли построить треугольник, сторонами которого были бы H и R? Можно. Таким треугольником является треугольник POM. В нем угол PMO — угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания. Обозначим этот угол через β. Решение данной задачи можно существенно упростить, если воспользоваться результатом задачи 48 (5), позволяющим выразить угол β через данный угол α: $\sin\beta = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

Далее выражаем H через R и действуем согласно замыслу решения.

90, *з.*

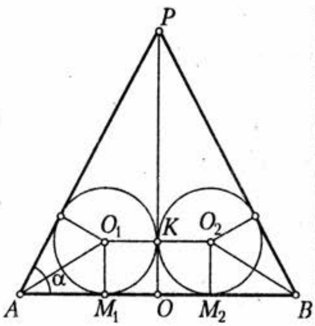


Рис. 51

Краткая запись задачи:

Два шара единичного радиуса (рис. 51) касаются основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания;

эти шары касаются также боковой поверхности конуса и друг друга;

α — угол наклона образующей конуса к основанию.

$V_к$ — ?

Выполнение и анализ рисунка. Так как точки M_1 и M_2 симметричны относительно центра O основания конуса, то можно провести осевое сечение конуса, проходящее через точки M_1 и M_2. Центры O_1 и O_2 данных шаров будут принадлежать плоскости этого осевого сечения. Это следует из того, что радиусы O_1M_1 и O_2M_2 перпендикулярны плоскости основания конуса и плоскость осевого сечения также перпендикулярна плоскости основания. Плоскость осевого сечения пересечет шары по двум кругам, которые касаются друг друга в точке, лежащей на оси конуса. В результате приходим к искомому рисунку. На этом риунке осевое сечение изображено треугольником PAB, $\angle PAB = \alpha$, K — точка касания шаров, лежащая на оси конуса PO. Нетрудно установить еще, что $M_1O = O_1K = 1$ и $\angle O_1AM_1 = \frac{\alpha}{2}$.

Занятие 27. Объем конуса и пирамиды

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 91, а—в из раздела «Задания для самостоятельной работы».

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 91, г—ж из раздела «Задания для самостоятельной работы» (три задачи на выбор).
Индивидуальное задание: задачи 92, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Занятие 28. Объем усеченной пирамиды и усеченного конуса

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 21.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 93, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 92; 93 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

92, *м.*

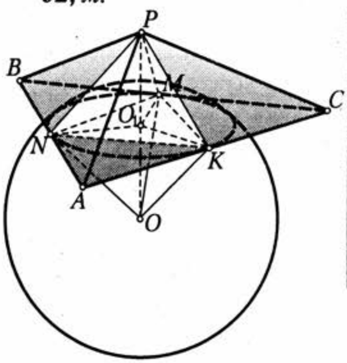


Рис. 52

Краткая запись задачи:
R — радиус шара (рис. 52), шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды $PABC$ в серединах сторон ее основания, P — вершина пирамиды,
O — центр шара, отрезок PO плоскостью ABC делится пополам.

$V_п$ — ?

Выполнение рисунка и его анализ. Пусть $PABC$ — данная пирамида, шар с центром O касается граней PAC, PCB и PBA соответственно в точках K, M и N, причем $AK = KC$, $CM = MB$, $BN = NA$. Пусть OP — данный отрезок. Проанализируем полученный рисунок и выполним на нем некоторые дополнительные построения (если это потребуется). Прежде всего, уточним расположение точки пересечения отрезка PO с основанием пирамиды. Для этого рассмотрим две пирамиды с общим основанием KMN и вершинами P и O. В пирамиде $OKMN$ $OK = OM = ON$ как радиусы шара. Поэтому основание O_1 высоты OO_1 этой пирамиды является центром окружности, описанной около треугольника KMN. Нетрудно установить, что PK, PM и PN — отрезки касательных, проведенных из точки P к данному шару. Поэтому $PK = PM = PN$. Заключаем, что точка O_1 является основанием высоты пирамиды $PKMN$, проведенной из вершины P. Если O_1P и O_1O — перпендикуляры к одной и той же плоскости ABC, то они лежат на одной прямой. Отсюда следует, что отрезок PO пересекает плоскость ABC в точке O_1, являющейся центром окружности, описанной около треугольника KMN. Отсюда также следует, что PO_1 — высота данной пирамиды $PABC$. Так как $OK \perp PAC$ и $PK \subset PAC$, то $OK \perp PK$. Значит, треугольник OKP — прямоугольный с прямым углом K. Медиана KO_1 в этом треугольнике является одновременно и высотой. В самом деле: $(PO_1 \perp ABC$ и $KO_1 \subset ABC) \Rightarrow PO_1 \perp KO_1$. Отсюда приходим к выводу, что треугольник OKP равнобедренный: $OK = KP = R$. После этого можно по теореме Пифагора найти PO и затем PO_1 — высоту пирамиды. Рассмотрим теперь основание ABC. Учитывая, что $AK = AN$ как отрезки касательных, проведенных к шару из точки A, получим: $AC = AB$. Аналогичным образом приходим к равенству всех трех сторон основания: $AB = BC = CA$; треугольник ABC оказался правильным. Отрезок O_1K является радиусом окружности, вписанной в основание ABC. Заметим, что $O_1K = O_1P$. После этого остается записать площадь правильного треугольника ABC, зная радиус окружности, вписанной в этот треугольник. В итоге можно записать выражение для объема данной пирамиды.

Занятие 29. Объем шара и его частей

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 22.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 95, а—в из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 95—97 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

Занятие 30. Площади поверхности призмы и пирамиды

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 23.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 98; 99, а—г из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 99, д—з из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Занятие 31. Площади поверхности призмы и пирамиды

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 100—102 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 103—105 из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 106—116 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

111, *б.*

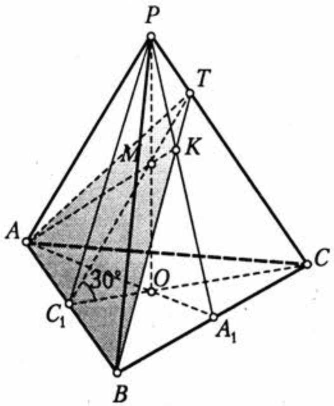


Рис. 53

Краткая запись задачи:
$PABC$ — правильная треугольная пирамида (рис. 53),
$AB = a$,
PO — высота,
M — середина высоты,
плоскость ABM наклонена к плоскости основания пирамиды под углом в 30°.

$S_{бок}$ — ?

Построение сечения. Вначале построим сечение данной пирамиды плоскостью ABM. Для этого найдем точку K, принадлежащую плоскости сечения и плоскости PAA_1, где AA_1 — медиана треугольника ABC: $K = AM \cap PA_1$. Далее строим: $T = BK \cap PC$, TA, TB, треугольник ATB — искомое сечение данной пирамиды плоскостью ABM.

Построение линейного угла. По условию плоскость ABM наклонена к плоскости ABC под углом в 30°. Построим этот угол. Пусть CC_1 — медиана треугольника ABC, $CC_1 \perp AB$. Через точку C_1 в плоскости ABT проведем еще один перпендикуляр к AB. Им будет C_1T (убедитесь в этом). Тогда $\angle TC_1C = 30°$ — данный линейный угол двугранного угла $TABC$. Нетрудно заметить, что $TC_1 \cap PO = M$.

Составление плана решения. Для нахождения $S_{бок}$ требуется найти PC_1 — апофему пирамиды. Ее можно найти из прямоугольного треугольника POC_1, в котором $OC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Поэтому для нахождения PC_1 достаточно найти высоту пирамиды PO. Для нахождения PO достаточно найти MO. В свою очередь MO можно найти из прямоугольного треугольника MOC_1, в котором известны OC_1 и $\angle MC_1O = 30°$.

Найдя PC_1, можно записать выражение для боковой поверхности пирамиды.

Вычисления. Имеем:

1) $OC_1 = \frac{1}{3}CC_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

2) $\frac{OM}{OC_1} = \operatorname{tg} 30° \Rightarrow OM = OC_1 \operatorname{tg} 30° = \frac{a\sqrt{3}}{6} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{6}$;

3) $H = PO = 2MO = \frac{a}{3}$;

4) $h_{бок} = PC_1 = \sqrt{PO^2 + OC_1^2} = \frac{a\sqrt{7}}{6}$;

5) $S_{PAB} = \frac{1}{2}AB \cdot PC_1 = \frac{1}{2}a \frac{a\sqrt{7}}{6} = \frac{a^2\sqrt{7}}{12}$;

6) $S_{бок} = 3S_{PAB} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{12} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

112, *а.*

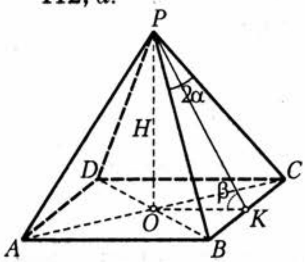


Рис. 54

Краткая запись задачи:
$PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида (рис. 54),
$PO = H$ — высота пирамиды,
$\angle BPC = 2\alpha$.

$S_{полн}$ — ?

Составление плана решения. Задача сводится к нахождению стороны основания и апофемы пирамиды. Нахождение обоих этих элементов удобно связать с треугольником POK, в котором угол PKO — линейный угол двугранного угла при ребре BC. В самом деле, OK равно половине стороны основания, а PK — апофема пирамиды. В этом прямоугольном треугольнике известен катет $PO = H$. Обозначим угол через β. Согласно задаче 48 (4) $\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{2\alpha}{2} = \operatorname{tg}\alpha$.

После этого можно переходить к вычислениям.

Вычисления. Имеем:

1) $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$;

2) $\dfrac{OK}{OA} = \operatorname{ctg}\beta \Rightarrow OK = \dfrac{H\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$;

3) $AB = \dfrac{2H\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} \Rightarrow S_{\text{осн}} = \dfrac{4H^2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$;

4) $PK = h_{\text{бок}} = \sqrt{\dfrac{H^2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{H}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$;

5) $S_{PBC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2H\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}\cdot\dfrac{H}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{H^2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$;

6) $S_{\text{бок}} = 4\,S_{PBC} = \dfrac{4H^2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$;

7) $S_{\text{полн}} = \dfrac{4H^2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{4H^2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{4H^2}{\operatorname{ctg}\alpha - 1}$.

Занятие 32. О понятии площади кривой поверхности. Площадь поверхности цилиндра — новое применение метода производной

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1; 2 из п. 24.3 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 117 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 118—120 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (три задачи на выбор).

119, *в.*

Краткая запись задачи:

$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}}$, P — периметр осевого сечения.

$S_{\text{осев. сеч}}$ — ?

Замысел решения. Так как $S_{\text{осев. сеч}} = 2RH$, то решение задачи сводится к нахождению R и H.

Решение. Имеем:

$$1)\ \left.\begin{aligned} S_{\text{полн}} &= 2\pi R^2 + 2\pi RH, \\ 2S_{\text{бок}} &= 4\pi RH, \\ S_{\text{полн}} &= 2S_{\text{бок}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\pi R^2 = 2\pi RH \Rightarrow R = H;$$

$$2)\ \left.\begin{aligned} 4R + 2H &= P, \\ R &= H \end{aligned}\right\} \Rightarrow 6R = P \Rightarrow R = \frac{P}{6};$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} R &= H, \\ R &= \frac{P}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{\text{осев. сеч}} = 2RH = \frac{2P^2}{36} = \frac{P^2}{18}.$$

120, *а.*

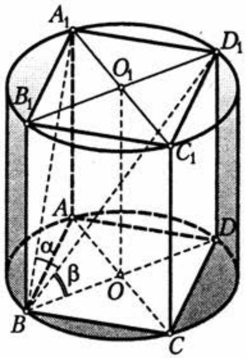


Рис. 55

Краткая запись задачи:
В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 55),
$AB = a$,
$\angle D_1BA_1 = \alpha$, $\angle D_1BD = \beta$.

$S_{\text{бок. ц}}$ — ?

Замысел решения. Введем обозначение: $AD = A_1D_1 = x$. Дважды выразим диагональ BD_1 параллелепипеда. Один раз с помощью угла β, другой раз — угла α. Приравняем эти выражения. Из полученного уравнения найдем x. Зная x, найдем $2R$ и H, и, значит, $S_{\text{бок. ц}} = 2\pi RH$. (Построение рисунка и его обоснование проведите самостоятельно.)

Решение.

1) Из прямоугольного треугольника BAD по теореме Пифагора

$$DB = 2R = \sqrt{a^2 + x^2};$$

2) из ΔD_1BD: $\dfrac{DB}{BD_1} = \cos\beta \Rightarrow BD_1 = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{\cos\beta};$

3) из ΔD_1BA_1: $\frac{x}{BD_1} = \sin\alpha \Rightarrow BD_1 = \frac{x}{\sin\alpha}$;

4) составляем и решаем уравнение:

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\cos\beta} = \frac{x}{\sin\alpha} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha};$$

5) тогда $2R = \sqrt{a^2 + \frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}} = \frac{a\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}$;

6) из ΔD_1BD: $\frac{H}{2R} = \operatorname{tg}\beta \Rightarrow H = \frac{a\cos\beta\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}} = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}$;

7) в итоге получаем, что

$$S_{\text{бок. ц}} = \pi \cdot 2RH = \pi \cdot \frac{a\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}} \cdot \frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\pi a^2 \sin 2\beta}{2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)} = \frac{\pi a^2 \sin^2 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}.$$

Занятие 33. Площадь поверхности конуса

1. Рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь конспектом из Приложения 2.

2. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 25.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 121; 122, а—в из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Индивидуальное задание: задачи 122, г—ж из раздела «Задания для самостоятельной работы».

122, *б.*

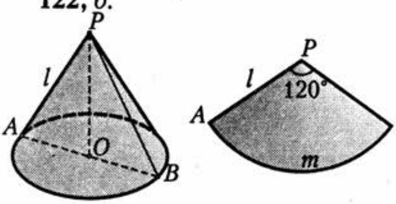


Рис. 56

Краткая запись задачи:

P — периметр осевого сечения конуса (рис. 56),

120° — угол развертки боковой поверхности.

$S_{\text{полн}}$ — ?

Решение. Введем обозначения: $PA = l$ — образующая конуса, R — радиус основания, m — длина дуги сектора. Тогда:

1) $2l + 2R = P$;

2) $m = \frac{2\pi l \cdot 120}{360} = 6\pi l$;

3) $6\pi l = 2\pi R \Rightarrow l = \frac{R}{3}$;

4) $\frac{2R}{3} + 2R = P \Rightarrow R = \frac{3P}{8}$;

5) $l = \frac{P}{8}$;

6) $S_{\text{осн}} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{9P^2}{64} = \frac{9\pi P^2}{64}$;

7) $S_{\text{бок}} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{3P}{8} \cdot \frac{P}{8} = \frac{3\pi P^2}{64}$;

8) $S_{\text{полн}} = \frac{9\pi P^2}{64} + \frac{3\pi P^2}{64} = \frac{3\pi P^2}{16}$.

Занятие 34. Площадь поверхности конуса

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 123; 124, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».

124, *а*.

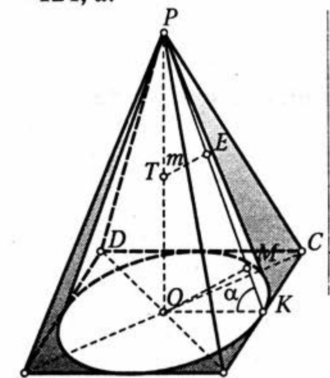


Рис. 57

Краткая запись задачи:
$PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида (рис. 57),
T — середина высоты PO, m — расстояние от точки T до боковой грани, α — угол наклона образующей вписанного конуса к плоскости его основания.

$S_{\text{полн. к}}$ — ?

Решение. Пусть $TE = m$ — расстояние от точки T до грани PBC. (Обоснование построений на рисунке проведите самостоятельно.) Более рациональное решение получится, если вместо отрезка TE рассмотрим отрезок $OM = 2m$ (параллельный отрезку TE). В этом случае получим прямоугольный треугольник OMK с катетом $OM = 2m$ и $\angle OKM = \alpha$. Тогда:

1) $\frac{OM}{OK} = \sin\alpha \Rightarrow R = OK = \frac{2m}{\sin\alpha}$;

2) $\frac{PO}{OK} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow PO = \frac{2m\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2m}{\cos\alpha}$;

3) $l = PK = \sqrt{PO^2 + OK^2} = \sqrt{\frac{4m^2}{\cos^2\alpha} + \frac{4m^2}{\sin^2\alpha}} = \frac{2m}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}$;

4) $S_{\text{осн}} = \pi R^2 = \frac{4\pi m^2}{\sin^2\alpha}$;

5) $S_{\text{бок}} = \pi Rl = \pi\cdot\frac{2m}{\sin\alpha}\cdot\frac{2m}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha} = \frac{4\pi m^2}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}$;

6) $S_{\text{полн. к}} = \frac{4\pi m^2}{\sin^2\alpha} + \frac{4\pi m^2}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{4\pi m^2(\cos\alpha+1)}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2\pi m^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha}$.

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 124, в, г из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 125 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Занятие 35. Площадь поверхности сферы и ее частей

1. Рекомендации к решению задач в классе

Задачи 1; 2 из п. 26.2 теоретической части пособия для учащихся.

2. Рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 126; 127, а, б из раздела «Задания для самостоятельной работы».
Индивидуальное задание: задачи 127—130 из раздела «Задания для самостоятельной работы» (две задачи на выбор).

128, *а.*

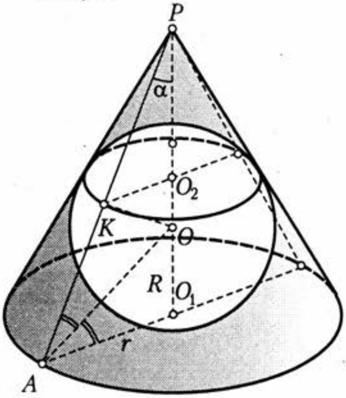


Рис. 58

Краткая запись задачи:
Сфера вписана в конус (рис. 58),
$S_{\text{бок. к}} = Q$,
α — угол между образующей и высотой конуса.

$S_{\text{сферы}}$ — ?

Решение. Учтем, что PA является касательной к сфере, поэтому $OK \perp PA$. Кроме того, центр сферы — точка O — лежит на биссектрисе угла PAO_1. Поэтому $\angle OAO_1 = \dfrac{90°-\alpha}{2} = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$. Дальнейшие вычисления:

1) $\left.\begin{array}{l} Q = \pi r l, \\ \dfrac{r}{l} = \sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r = l\sin\alpha = \dfrac{Q\sin\alpha}{\pi r} \Rightarrow \pi r^2 = Q\sin\alpha \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{Q\sin\alpha}{\pi}}$;

2) $\dfrac{OO_1}{AO_1} = \operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{R}{r} = \operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow R = \operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\dfrac{Q\sin\alpha}{\pi}}$;

3) $S_{\text{сферы}} = 4\pi \operatorname{tg}^2\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{Q\sin\alpha}{\pi} = 4Q\sin\alpha \operatorname{tg}^2\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

128, *к.*

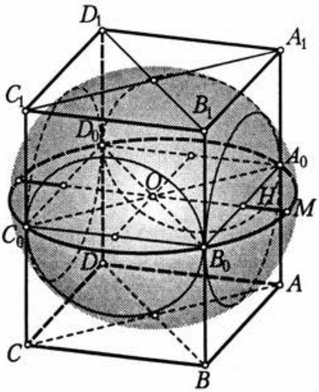


Рис. 59

Краткая запись задачи:
Сфера касается всех боковых ребер и оснований правильной четырехугольной призмы (рис. 59).

Найти отношение площади поверхности сферы, лежащей вне призмы, к площади.

План решения.

1) Обозначим через R радиус данного шара;

2) установим, что высота призмы равна $2R$;

3) далее выразим через R сторону основания призмы;

4) составим выражение для полной поверхности призмы;

5) выясним, что части сферы, расположенные вне призмы, представляют собой сферические сегменты;

6) находим высоту сферического сегмента, затем площадь четырех сферических сегментов;

7) составляем искомое отношение.

128, *л.*

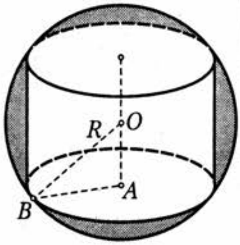


Рис. 60

Краткая запись задачи:
Цилиндр вписан в шар радиуса R (рис. 60), цилиндр имеет поверхность наибольшей площади.

Найти радиус r основания цилиндра и высоту H.

Замысел решения. Запишем площадь полной поверхности цилиндра как функцию от r. С помощью производной найдем r, при котором эта площадь окажется наибольшей. Полученное значение r будет искомым. По нему находим другую искомую величину H.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

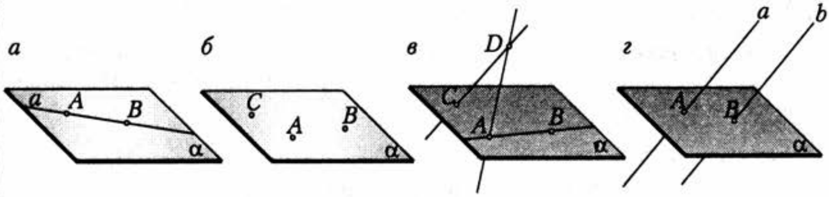
КОНСПЕКТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА 10 КЛАССА

При изложении теоретического материала рекомендуется воспользоваться крупноблочным изложением учебного материала, опираясь на приводимые ниже конспекты. Пропуски текста приводятся с целью активизации учащихся. Конспекты могут использоваться как при изучении нового материала, так и при его закреплении.

Занятие 1. Конспект

Введение в стереометрию

Аксиомы стереометрии



1 (*аксиома о связи стереометрии и планиметрии*). В каждой плоскости справедливы все определения, аксиомы и теоремы планиметрии.

2 (*аксиома о принадлежности прямой плоскости*):

$$(A, B \in a \text{ и } A, B \in \alpha) \Rightarrow AB \subset \alpha \text{ (рис. 1, } a\text{)}.$$

3 (*аксиома о задании плоскости*). Если три точки не лежат на одной прямой, то существует плоскость, ______________________________

______________________________ (рис. 1, *б*).

4 (*аксиома размерности пространства*). В трехмерном пространстве существуют ______________________________

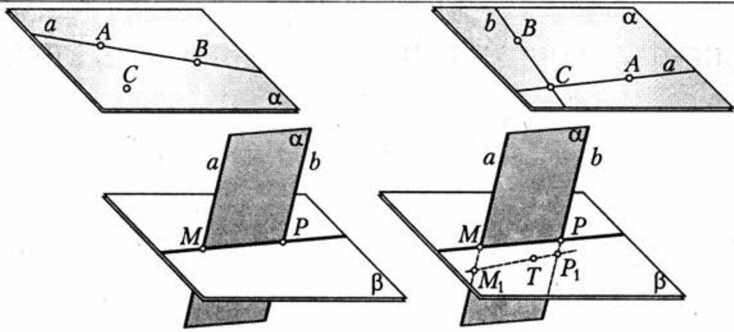
______________________________ (рис. 1, *в*).

5 (*аксиома о пересечении параллельных прямых плоскостью*):

$$(\alpha \otimes a \text{ и } a \parallel b) \Rightarrow \alpha \otimes b \text{ (рис. 1, } г\text{)}.$$

Занятие 2. Конспект

Теоремы 1—3

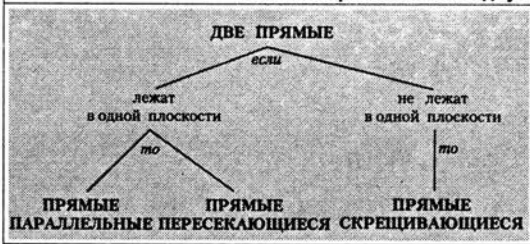


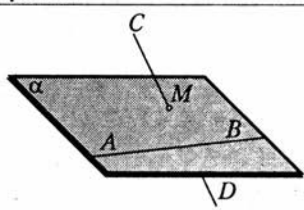
1—2. Существует плоскость, проходящая через прямую и не лежащую на ней точку (две пересекающиеся прямые), и ________________________.

3 (*о линии пересечения двух плоскостей*). Если две различные плоскости (α и β) ________________________ (точку M), то они имеют единственную общую прямую, проходящую через эту точку.

Занятие 3. Конспект

Взаимное расположение двух прямых





Скрещивающиеся прямые

Определения

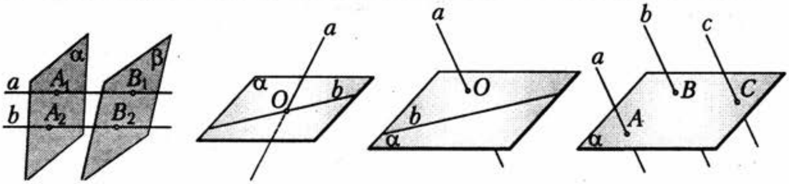
Скрещивающимися прямыми называются две прямые, для которых не существует ________________________.

Обозначение: $a \dotminus b$ (a и b — скрещивающиеся прямые).

Теорема 4

(*Признак скрещивающихся прямых*). Если ________________________ ________________________, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые — скрещивающиеся.

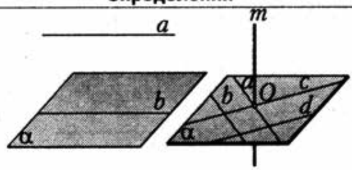
Занятие 3. Конспект

Параллельные прямые

Теоремы 5–6
5 (***признак параллельности прямых в пространстве***). Если любая плоскость, пересекающая одну из двух прямых, пересекает и другую, ____________________________________. 6 Параллельность прямых обладает следующими свойствами: а) (__________________) каждая прямая параллельна самой себе: $a \parallel a$; б) (__________________________) если прямая a параллельна прямой b, то и обратно – прямая b параллельна прямой a: $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$; в) (_______________________________) если прямая a параллельна прямой b и прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c: $(a \parallel b$ и $b \parallel c) \Rightarrow a \parallel c$.
Угол между двумя прямыми
Определения
Углом между двумя пересекающимися прямыми называется ______________, образуемых при пересечении этих прямых. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми* называется угол между двумя пересекающимися прямыми, ________________________________ данным скрещивающимся прямым. Если угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен 90°, то скрещивающиеся прямые называются ***перпендикулярными***.

Занятие 6. Конспект

Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости

Определения



ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

если

существует единственная общая точка — *то* — **ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ** — *либо* — прямая перпендикулярна к плоскости / прямая наклонна к плоскости

общих точек не существует *или* существует более одной — *то* — **ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ**

Теорема 7

Прямая и плоскость называются ***параллельными***, если ______________________

____.

Если прямая перпендикулярна ______________________________________,
то она называется ***перпендикулярной*** к этой плоскости.

Теоремы 8–9

8: 1 (*признак параллельности прямой и плоскости*). Если прямая (a) параллельна ______________________ ______________(b), принадлежащей плоскости (α), то данная прямая параллельна этой плоскости.

2 (*обобщенный признак параллельности прямой и плоскости*). Если прямая (a) параллельна ___________ (b), параллельной плоскости (α), то данная прямая (a) параллельна этой плоскости.

3 (*обратная теореме* 8.1). Если через прямую (a), параллельную плоскости (α), проходит некоторая плоскость, ______________________, то линия пересечения (b) параллельна данной прямой (a).

9: 1 (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*). Если прямая (AA_1), пересекающаяся с плоскостью (α), перпендикулярна к каким-либо двум прямым (OB и OC),

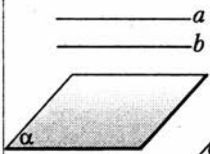
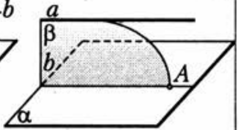
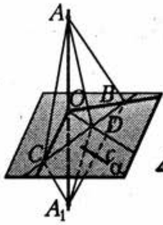
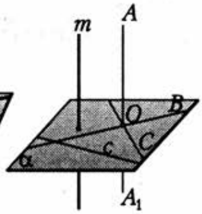
____

____

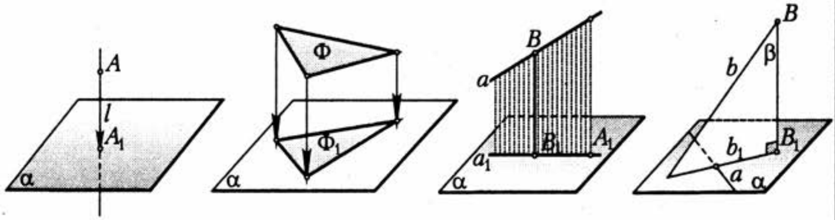
______________________________________,

то она перпендикулярна к данной плоскости.

2 (*обобщенный признак перпендикулярности прямой и плоскости*). Если прямая (m) перпендикулярна к двум пересекающимся прямым (OB и OC), ______________________, то данная прямая перпендикулярна к плоскости.

 	 
Следствия	**Теоремы 10**
1. Если прямая параллельна плоскости и имеет с ней общую точку, то ________________________________ ________________________________.	1. Если одна из параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то ________________________________ ________________________________.
2. Если прямая параллельна двум пересекающимся плоскостям, то ________________________________.	2. Через данную точку можно провести только одну прямую, ________ к данной плоскости.
3. Через данную точку можно провести сколько угодно прямых, параллельных ________________________.	3. Если две прямые перпендикулярны к одной плоскости, то __________.

Занятие 7. Конспект

Ортогональная проекция. Теоремы о трех перпендикулярах

Определения
Пусть дана плоскость α и не принадлежащая ей точка A. Проведем через точку A прямую l, перпендикулярную к плоскости α и пересекающую эту плоскость в точке A_1. Полученная точка A_1 называется ______________________________.
Если для каждой точки фигуры Φ построим ее ортогональную проекцию на плоскость α, то полученная фигура $Φ_1$ называется ______________________. Плоскость α называется ________________.
Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна к ней, то она называется ______________ к этой плоскости.
Если прямая перпендикулярна к плоскости, то по определению полагают, что *угол между прямой и плоскостью* __________.
Углом между наклонной и плоскостью называется угол между ______________________________.
Следствие
Если прямая не перпендикулярна к данной плоскости, то ее ортогональная проекция на эту плоскость ______________.
Теоремы 11
1 (*о трех перпендикулярах*). Если прямая, лежащая в плоскости проекций, перпендикулярна к наклонной этой плоскости, то ______________________________.
2 (*обратная теорема*). Если прямая, лежащая в плоскости проекций, перпендикулярна к проекции наклонной, то ______________________.

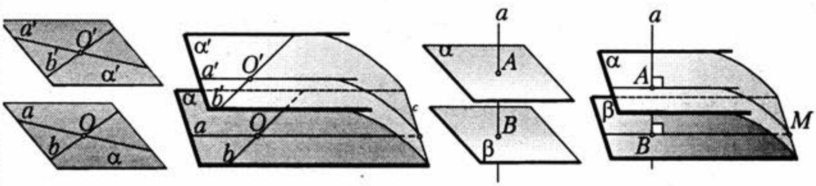
Занятие 13. Конспект

Взаимное расположение двух плоскостей:
параллельность двух плоскостей

Определения

Две плоскости называются ***параллельными***, если они либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Теоремы 12—14



Признаки параллельности плоскостей: 12 (*1-й признак*). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости ________________________________
____.

13 (*2-й признак*). Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то ______________________.

14: 1. Через точку, лежащую вне данной плоскости, можно провести не более одной плоскости, ____________________.

2. Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, ____
____.

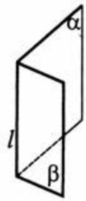
3. Если две плоскости параллельны, то любая прямая, пересекающая одну из них, ____________________________.

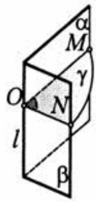
4. Если две плоскости параллельны, то любая прямая, перпендикулярная к одной из них, ________________________________.

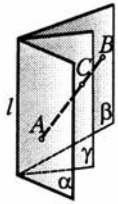
Занятие 14. Конспект

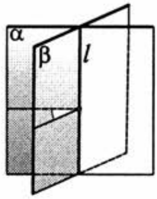
Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями

Определения









Двугранным углом называется ф и г у р а, состоящая из двух полуплоскостей (α и β), имеющих общую границу (l), ____.

Обозначение: $\alpha l \beta$ – двугранный угол с гранями α и β и ребром l.

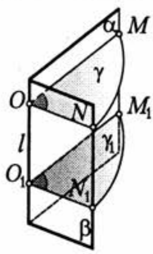
Линейным углом двугранного угла называется п л о с к и й у г о л ($\angle MON$), полученный при пересечении двугранного угла плоскостью (γ), __________.

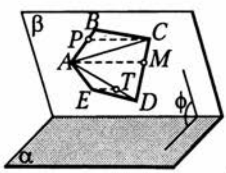
Пусть дан двугранный угол $\alpha l \beta$. Полуплоскость γ с ребром l, пересекающая отрезок, концы которого лежат на гранях двугранного угла, называется *полуплоскостью*, ____.

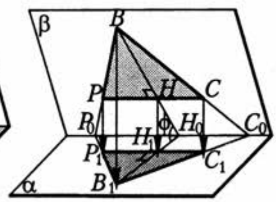
Биссектором двугранного угла называется п о л у п л о с к о с т ь, проходящая между его гранями и делящая двугранный угол на _________________________.

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется ______ из двугранных углов, получаемых при их пересечении.

Теоремы 15



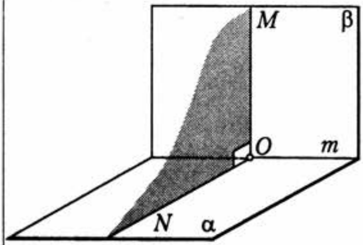


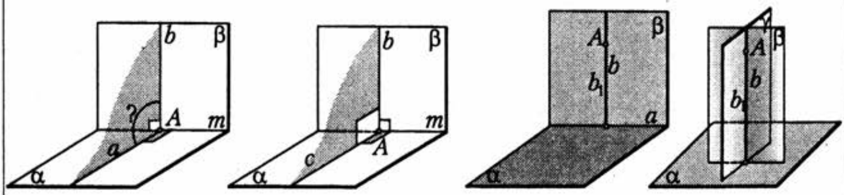


1. Все линейные углы двугранного угла __________.

2. Площадь ортогональной проекции многоугольника равна ______________.

Занятие 15. Конспект

Перпендикулярность двух плоскостей	
Определение	
	Две плоскости называются ***перпендикулярными***, если они пересекаются под прямым двугранным углом.
Теоремы 16	



1 (*признак перпендикулярности двух плоскостей*). Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то ______________________________ ____.

2. Если две плоскости перпендикулярны и в одной из них проведен перпендикуляр к линии их пересечения, то ______________________________.

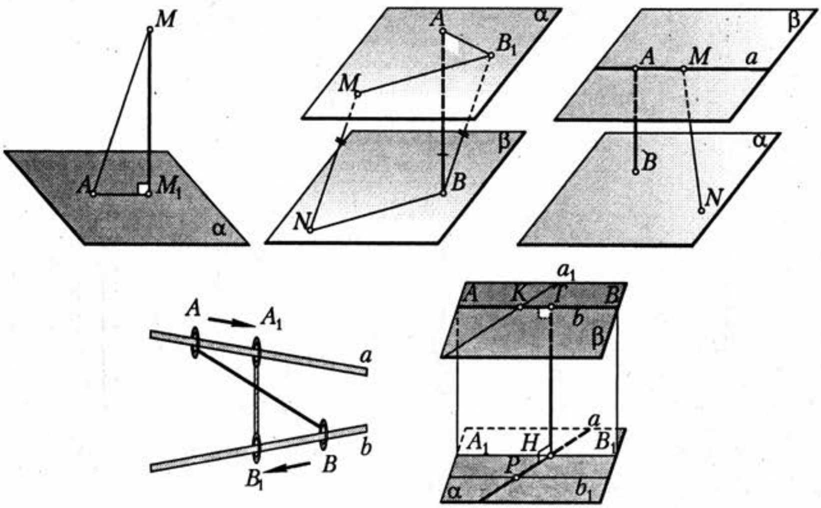
3. Если прямая и плоскость перпендикулярны к некоторой другой плоскости и имеют общую точку, то ______________________________.

4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны к третьей плоскости, то линия ______________________________.

Занятие 17. Конспект

Определение
Пусть точка A принадлежит одной фигуре, а точка B — другой. При различном выборе точек A и B расстояние AB изменяется. В том случае, когда оно становится наименьшим, его называют ***расстоянием между данными фигурами.***

Теоремы 17–18



17. Расстояние от точки до плоскости равно ______________________________

____ .

18. 1. Существует единственная прямая HT, пересекающая скрещивающиеся прямые a и b и ______________________________ .

2. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно __________

____ .

Следствия

1. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно __________

____ .

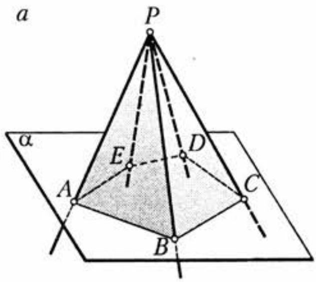
2. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью равно ________

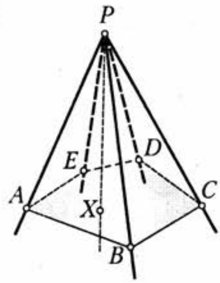
____

____ .

Занятие 21. Конспект

Определения





Пусть на плоскости α имеется многоугольник и вне этой плоскости – точка P. Объединение плоских углов APB, BPC, CPD, ... образует пространственную фигуру, которая называется ______________________________.

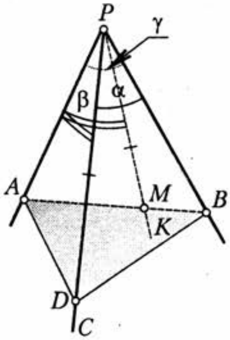
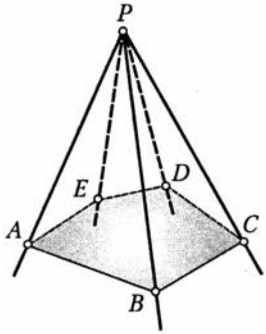
Обозначение: $PABC$ ... – многогранный угол $PABC$ ... .

Точка P называется ________________ многогранного угла, общие стороны плоских углов PA, PB, PC, ... – его __________, углы APB, BPC, CPD ... вместе с их внутренними точками – его _____________. Объединение граней многогранного угла называется его поверхностью.

В зависимости от числа граней многогранные углы бывают ***трехгранные***, ***четырехгранные*** и т. д.

Многогранный угол называется __________, если он лежит по одну сторону относительно плоскости любой из его граней, в противном случае – _____.

Пусть X – произвольная внутренняя точка плоского многоугольника $ABCDE$. Проведем луч PX. Говорят, что *луч PX проходит внутри данного многогранного угла*. Каждая точка луча PX называется *внутренней точкой многогранного угла*. Множество всех внутренних точек многогранного угла называется *внутренней областью* многогранного угла. Многогранный угол вместе с его внутренней областью обычно также называется *многогранным углом*.

Теоремы 19
 
1. Каждый плоский угол трехгранного угла меньше ______________________ ____.
2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла равна ____________.

Занятие 23. Конспект

Воображаемые (условные) построения

В стереометрии построения бывают двух видов: ______________________________
____ .

Аксиомы геометрических построений в пространстве (условные соглашения о построениях в пространстве)

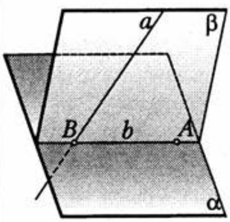
Если построены элементы, определяющие положение плоскости в пространстве, то плоскость, проходящая через эти элементы, ______________
______________ .

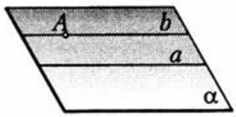
2. Если построены две пересекающиеся плоскости, то линия их пересечения также ____ .

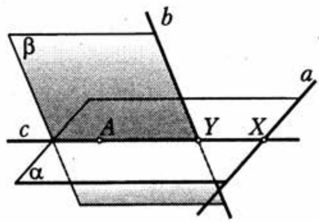
3. Если дана плоскость, то считается, что в ней можно выполнить все планиметрические построения.

Как видно, построения в пространстве начинаются с некоторых условных соглашений ... . Такие построения в пространстве называются ______________
____ .

Примеры решения задач







Задача 1. Постройте точку пересечения данной прямой a с данной плоскостью α.

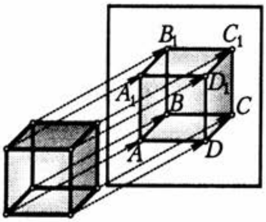
Задача 2. Через данную точку A, лежащую вне данной прямой a, проведите прямую, параллельную данной прямой a.

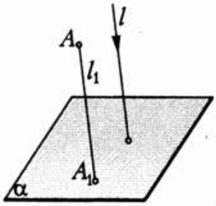
Задача 3. Через данную точку A проведите прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые a и b.

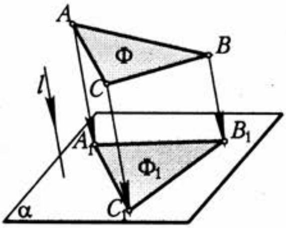
Занятие 24. Конспект

Параллельная проекция

Определения







Рассмотрим еще один вид построений в пространстве — *построения на проекционном чертеже.*

Рассмотрим плоскость α и прямую l, пересекающую эту плоскость. Возьмем в пространстве произвольную точку A, проведем через нее прямую $l_1 \parallel l$. Пусть прямая l_1 пересекает плоскость α в точке A_1. Точка A_1 называется ____

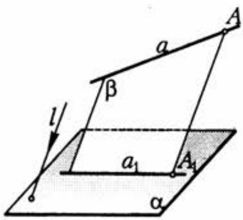
____________________ α в данном направлении l.

Плоскость α называется ______________; прямая l — *направлением проектирования*; прямая l_1 — ______________________________ A.

Множество Φ_1 проекций всех точек фигуры Φ называется ______________

____.

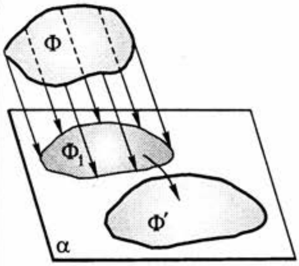
Теоремы 20



Свойства параллельного проектирования. При параллельном проектировании для прямых, не параллельных направлению проектирования, выполняются следующие свойства: 1. Проекция прямой есть прямая, проекция отрезка — отрезок. 2. Проекции параллельных прямых ________________ . 3. Отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых, ____________ . 4. Если треугольник лежит в плоскости, параллельной плоскости проекций, то ____________________ .
Доказательства
1. 1) Пусть точка $B \in a$, $\beta = (a; AA_1)$, $\beta \cap \alpha = a_1$; 2) в плоскости β через точку B проведем $l_1 \parallel AA_1$; 3) пусть $l_1 \cap a_1 = B_1$. Полученная точка B_1 является проекцией точки B на плоскость α в направлении l. В самом деле: $(l_1 \parallel AA_1$ и $AA_1 \parallel l) \Rightarrow l_1 \parallel l$; 4) аналогичными рассуждениями показывается, что каждая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой a; 5) следовательно, при указанном параллельном проектировании прямая a переходит в прямую a_1. *Замечание.* Плоскость $\beta = (a; AA_1)$, проходящая через прямую a и проектирующую прямую AA_1 некоторой точки $A \in a$, называется *проектирующей плоскостью прямой a*. **2.** 1) Пусть $a \parallel b$ $(a \in l, b \in l)$, a_1 и b_1 — проекции данных прямых. Докажем, что $a_1 \parallel b_1$; 2) рассмотрим проектирующие плоскости β и γ этих прямых. Эти плоскости параллельны (почему?); 3) поэтому плоскость α пересекает плоскости β и γ по параллельным прямым a_1 и b_1: $a_1 \parallel b_1$; 4) может оказаться, что прямые a и b лежат в одной проектирующей плоскости β. В этом случае они проектируются в одну и ту же прямую: $a_1 = b_1$. Следовательно, и в этом случае $a_1 \parallel b_1$.

Занятие 25. Конспект

Определение



Фигура Ф′ называется ***изображением фигуры*** Ф, если ______________________________
______________________________________ .

Следствия

Свойства изображений:

1) прямая изображается _____________________________________;

2) параллельные прямые изображаются ________________________;

3) параллельные отрезки сохраняют ____________________________;

4) если треугольник лежит в плоскости, параллельной плоскости чертежа, то он ____;

5) окружность изображается _______________.

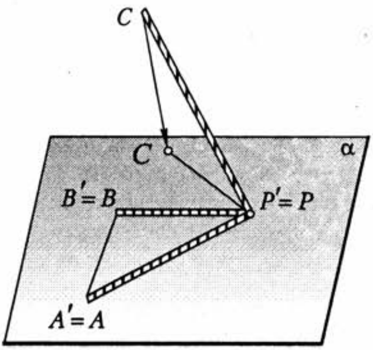
Теорема 21

На плоскости чертежа в качестве изображения данного треугольника может быть взят _________________________________.

Занятие 26. Конспект

Определение
Фигура, образованная тремя отрезками, выходящими из одной точки и не лежащими в одной плоскости, называйся *треножником*. Обратите внимание: треножник — пространственная фигура! Обозначение: *PABC*, где *P* — *вершина* треножника, *PA*, *PB* и *PC* — отрезки, выходящие из вершины.

Теорема 22



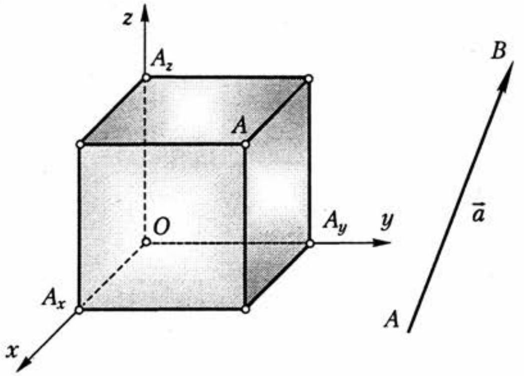
Пусть дан треножник *PABC*. Можно подобрать направление проектирования на плоскость чертежа таким образом, что треугольник *PAB* изобразится

____

треугольником $P'A'B'$, а отрезок *PC* — ____________________ отрезком $P'C'$.

Занятие 29. Конспект

Определения



Рассмотрим три попарно перпендикулярные, пересекающиеся в точке O прямые Ox, Oy и Oz. Пусть положительное направление этих прямых задается соответственно лучами Ox, Oy и Oz. Точку O будем называть *началом координат*, прямые Ox, Oy, Oz (*координатные прямые*) — соответственно *осью абсцисс*, *осью ординат* и *осью аппликат*, плоскости xOy, xOz и yOz — *координатными плоскостями*.

Пусть A — произвольная точка пространства. Проведем через точку A плоскости, перпендикулярные к координатным осям. Пусть A_x, A_y и A_z — точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат.

Отрезок AB, для которого конец A считается первым, а конец B — вторым, называется ***направленным отрезком***, или ***вектором***. Точка A называется ________________, точка B — ______________. Обозначения: $\overrightarrow{AB}$ — вектор AB, $\vec{a}$ — вектор a.

Длину отрезка AB называют ______________________________________ $\overrightarrow{AB}$. Длину вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$.

Если точка A имеет координаты x_1, y_1 и z_1, а точка B — координаты x_2, y_2 и z_2, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ и $z_2 - z_1$ называются ___________________________ $\overrightarrow{AB}$.

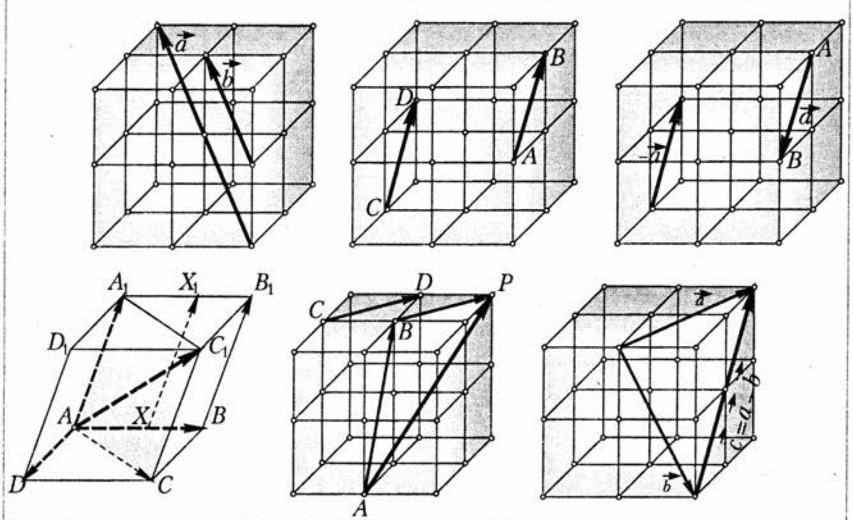
Записывают: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ — вектор $\overrightarrow{AB}$ с координатами $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ и $z_2 - z_1$, $\vec{a}(x; y; z)$ — вектор $\vec{a}$ с координатами x, y и z.

Уравнение с тремя переменными x, y, z называется _______________________ (в системе координат $Oxyz$), если этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек данной фигуры и только этих точек.

Теоремы 23–24
23: 1. Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ находится по формуле: $AB =$ __________________________.   2. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты x, y и z, то его длина находится по формуле $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.   3. Если $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты середины отрезка AB — точки $C(x; y; z)$ — находятся по формулам: __________________________.
24: 1. Если прямая не параллельна ни одной из координатных плоскостей, то ее уравнения имеют вид: __________________________.   2. Если прямая параллельна какой-либо одной координатной плоскости, то ее уравнения имеют один из видов: ____.   3. Если прямая параллельна каким-либо двум координатным плоскостям, то ее уравнения имеют один из видов: __________________________________.

Занятие 30. Конспект

Определения



Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают. *Коллинеарными векторами* называются два вектора, которые ______________
____.

Равными векторами называются два вектора, если ______________________
____.

Противоположными векторами называются векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$, если один из них равен некоторому вектору $\overrightarrow{AB}$, а другой – вектору $\overrightarrow{BA}$.

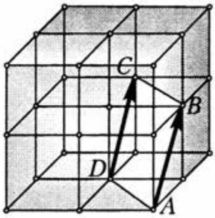
Следующие два понятия являются новыми, этим понятиям в планиметрии аналога нет.

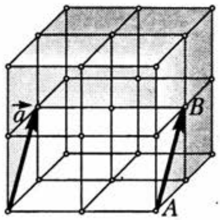
Некомпланарными векторами называются векторы, которые после откладывания их от одной точки ____________________________ (например, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$). В противном случае векторы называются *компланарными* (например, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$).

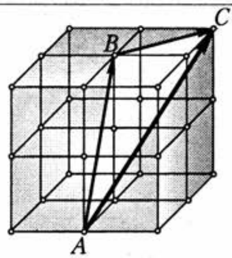
Даны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Отложим от точки B вектор $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{CD}$. Получим вектор $\overrightarrow{AP}$, который называется ________________________________.

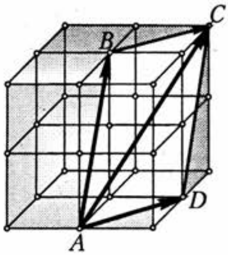
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что ________________.

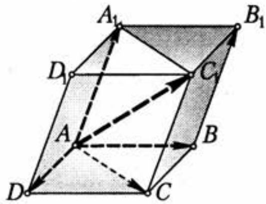
Теоремы 25–26











25: 1–2. $ABCD$ – параллелограмм $\Leftrightarrow$ ______________________.

3. Для любого вектора $\vec{a}$ и любой точки A ______________________, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. (В этом случае говорят, что *вектор $\vec{a}$ отложили от точки A*.)

4. Одноименные координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда равны сами векторы.

26: 1 (__________). $AB + BC = AC$.

2 (_____________). Если четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

3 (____________________). Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}$.

4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

5. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$; $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

6. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

7. $\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MK}$.

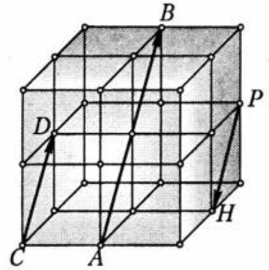
8. $\vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$; $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$.

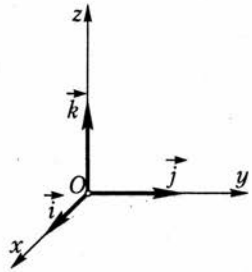
9. $\left.\begin{array}{l} \vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}, \\ \vec{a}(x_1; y_1; z_1), \\ \vec{b}(x_2; y_2; z_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{c}(x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$.

Занятие 31. Конспект

Определения





Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $k \neq 0$. *Произведением вектора* $\vec{a}$ на *действительное число* k называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) ______________________;

2) ______________________;

3) направление вектора $\vec{b}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $k > 0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$ при $k < 0$;

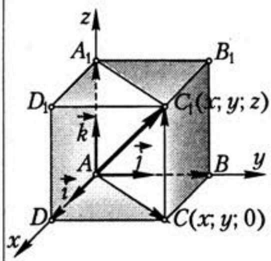
4) если $k = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то произведение вектора $\vec{a}$ на число k есть нулевой вектор.

Обозначение: $\vec{b} = k\vec{a}$ — вектор $\vec{b}$ есть произведение вектора $\vec{a}$ на число k.

Вектор называется *единичным*, если его длина равна 1. Единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, имеющие направления положительных координатных полуосей, называются *базисными векторами*, или *ортами*. Координаты базисных векторов таковы: $\vec{i}(1; 0; 0)$, $\vec{j}(0; 1; 0)$, $\vec{k}(0; 0; 1)$.

Представление вектора $\overrightarrow{AC_1}$ в виде $\overrightarrow{AC_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + y\vec{k}$ называется *разложением этого вектора по базисным векторам* $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

Теоремы 27



1. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

2. $\vec{a}(x_1; y_1; z_1) \Rightarrow k\vec{a}$ ____________.

3. Произведение вектора на число обладает следующими свойствами:

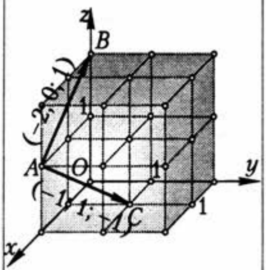
а) $k(p\vec{a}) =$ ____________ — *сочетательный закон;*

б) $k(\vec{a} + \vec{b}) =$ ____________ — *первый распределительный закон.*

Любой вектор AC_1 с координатами x, y и z может быть единственным образом представлен в виде ________________________.

Занятие 32. Конспект

Определения



П р и м е р.

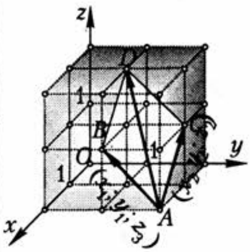
Пусть $\overrightarrow{AB}(-2; 0; 1)$ и $\overrightarrow{AC}(-1; 1; -1)$.

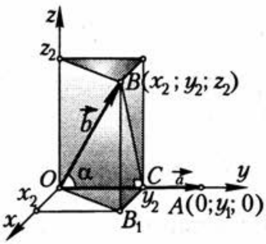
Тогда $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1$.

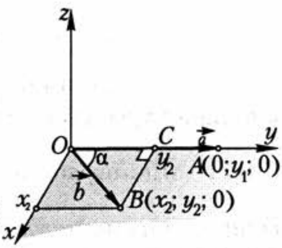
Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты x_1, y_1 и z_1, вектор $\vec{b}$ — координаты x_2, y_2 и z_2.

По определению:
$\vec{a}\,\vec{b} =$ ______________ .

Теоремы 28







1. Скалярное произведение двух векторов не зависит от выбора системы координат.

2 (*о геометрическом смысле скалярного произведения двух векторов*):

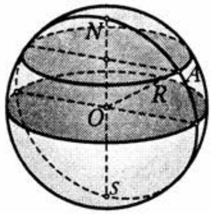
$\vec{a}\vec{b} =$ ________, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3 (*векторный признак перпендикулярности двух прямых*). Если для ненулевых векторов $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, то __________.

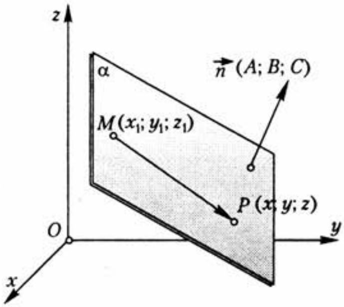
Следствия

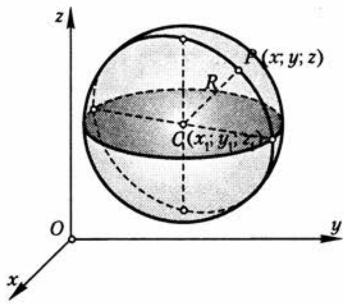
Скалярное произведение двух векторов обладает следующими свойствами:
1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$; 2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$; 3. $\vec{a}\left(k\vec{b}\right) = k\left(\vec{a}\vec{b}\right)$; 4. $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Занятие 33. Конспект

Определения	
	*Сферой с центром O и радиусом R* называется множество всех точек ____________ , удаленных от точки O на расстояние R. Если вектор $\vec{n}$ перпендикулярен к плоскости α, то он называется ________________ этой плоскости. Плоскость α можно задать точкой M, принадлежащей плоскости, и нормальным вектором $\vec{n}$.

Теоремы 29





29: 1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_1; y_1; z_1)$ и перпендикулярной к вектору $\vec{n}(A; B; C)$, имеет вид:

____ (1)

(оно называется ***уравнением плоскости, заданной точкой и нормальным вектором***).

2. Уравнение сферы с центром $C(x_1; y_1; z_1)$ и радиусом R имеет вид:

____ . (2)

Следствие

Если центр сферы находится в начале координат, то уравнение сферы имеет вид ______________________ .

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

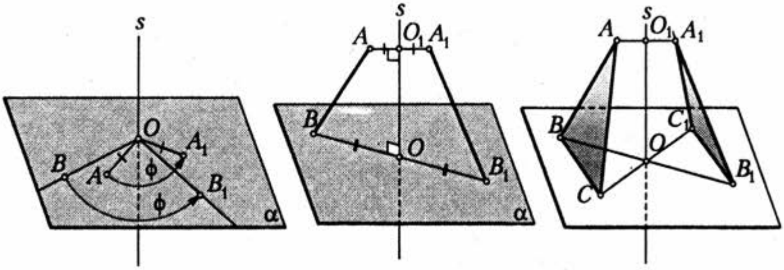
КОНСПЕКТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА 11 КЛАССА

Занятие 1. Конспект

Определения
Геометрическим преобразованием пространства называется взаимно-однозначное отображение пространства на себя. Если при выполнении преобразования П фигура Ф (в частности, точка) переходит в фигуру $Ф_1$, то фигура $Ф_1$ называется *образом* фигуры Ф в данном преобразовании. Записывают: $Ф_1 = П(Ф)$, $Ф \to Ф_1$. Преобразование, сохраняющее расстояние между точками, называется ***движением***. Преобразование, изменяющее расстояние между точками в одно и то же число раз ($k \neq 0$), называется ***преобразованием подобия***. Число k называется *коэффициентом подобия*. Напомним, что если при преобразовании некоторые точки переходят в себя, то они называются *неподвижными точками* данного преобразования.
Теоремы 1
1. Движение и преобразование подобия переводят точки, лежащие на прямой, в точки, также лежащие на прямой, причем сохраняют порядок взаимного расположения точек. 2. При движении и преобразовании подобия прямые переходят в прямые, лучи — в лучи, отрезки — в отрезки. 3. При движении отрезок переходит в равный ему отрезок, треугольник — в равный ему треугольник, угол (и при движении, и при преобразовании подобия) — в равный ему угол. 4. Последовательное выполнение (*композиция*) двух движений (преобразований подобия) есть также движение (преобразование подобия). 5. Если преобразование П (движение, преобразование подобия) переводит прямую в прямую, то преобразование П плоскость переводит в плоскость. 6. Если преобразование П прямую переводит в параллельную прямую, то преобразование П плоскость переводит в параллельную плоскость.

Занятие 3. Конспект

Определения



Пусть $s \perp \alpha$ и O — точка пересечения прямой s и плоскости α.

Поворотом вокруг оси s на угол φ называется преобразование, которое в каждой плоскости, перпендикулярной к оси s, вызывает поворот вокруг центра O на угол φ.

Если прямая s проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему, то точки A и A_1 называются ***симметричными относительно прямой*** s. При этом точки прямой s считаются симметричными сами себе.

Преобразование, при котором каждая точка A переходит в точку A_1, симметричную относительно прямой s, называется ***осевой симметрией***. Прямая s называется *осью симметрии*.

Записывают: $s(A) = A_1$. Эта запись означает, что при осевой симметрии с осью s точка A переходит в точку A_1.

Если $s(A) = A_1$, то, очевидно, $s(A_1) = A$. Говорят, что точки A и A_1 являются *взаимно симметричными* относительно оси s.

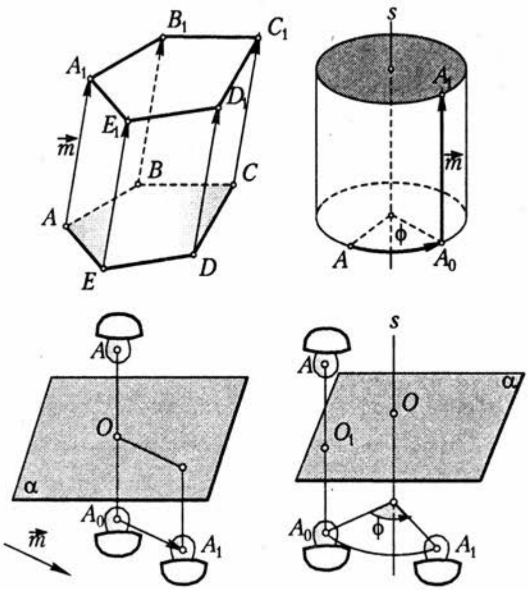
Очевидно, что осевая симметрия пространства является поворотом вокруг оси на 180°.

Теорема 2

Каждое из следующих преобразований: а) симметрия относительно плоскости; б) центральная симметрия; в) поворот вокруг оси; г) осевая симметрия; д) параллельный перенос; е) винтовое движение — является движением.

Занятие 4. Конспект

Определения



Параллельным переносом на вектор $\vec{m}$ называется преобразование пространства, при котором каждая точка A переходит в точку A_1 такую, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{m}$. Вектор $\vec{m}$ называется ***вектором параллельного переноса*** (вектором, на который совершается параллельный перенос).

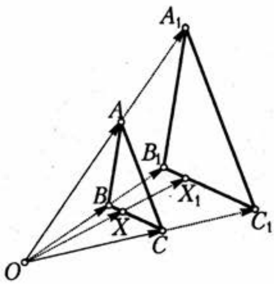
Записывают: $\vec{m}(A) = A_1$. Эта запись означает, что при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$ точка A перешла в точку A_1.

Винтовым движением с осью s, углом поворота φ и вектором переноса $\vec{m}$, параллельным оси s, называется последовательное выполнение (композиция) поворота вокруг оси s на угол φ и параллельного переноса на вектор $\vec{m}$.

Скользящей симметрией называется последовательное выполнение симметрии относительно плоскости α и параллельного переноса на вектор $\vec{m}$, параллельный этой плоскости.

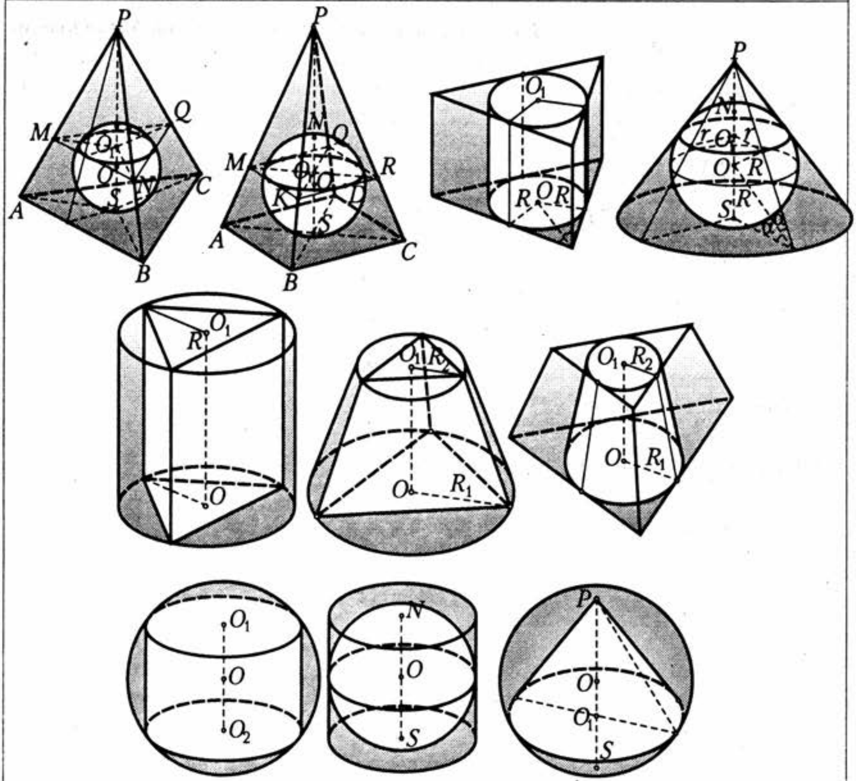
Поворотной симметрией называется последовательное выполнение симметрии относительно плоскости α и поворота на некоторый угол φ вокруг оси s, перпендикулярной к этой плоскости.

Занятие 5. Конспект

<table>
<tr><th colspan="2">Определения</th></tr>
<tr><td></td><td>Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется такое преобразование пространства, при котором каждая точка X переходит в точку X_1 такую, что ______________________ ______________________________________.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Теоремы 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Гомотетия является ______________________________ .

2. При гомотетии прямая переходит в параллельную прямую, плоскость — ______________________________________.</td></tr>
</table>

Занятие 16. Конспект

Определения	
	
Многогранник называется *вписанным в сферу* (сфера — *описанной около многогранника*), если его вершины принадлежат сфере.	Многогранник называется *описанным около сферы* (сфера — *вписанной в многогранник*), если все его грани касаются сферы.
Цилиндр называется *вписанным в сферу* (сфера — *описанной около цилиндра*), если окружности его оснований принадлежат сфере.	Цилиндр называется *описанным около сферы* (сфера — *вписанной в цилиндр*), если его основания касаются сферы, а боковая поверхность имеет со сферой только одну общую окружность.

Конус называется *вписанным в сферу* (сфера — *описанной около конуса*), если его вершина и окружность основания принадлежат сфере.	Конус называется *описанным около сферы* (сфера — *вписанной в конус*), если основание конуса касается сферы, а боковая поверхность имеет со сферой только одну общую окружность.
Призма называется *вписанной в цилиндр* (цилиндр — *описанным около призмы*), если основания призмы вписаны в основания цилиндра.	Призма называется *описанной около цилиндра* (цилиндр — *вписанным в призму*), если основания призмы описаны около оснований цилиндра.
Усеченная пирамида называется *вписанной в усеченный конус* (усеченный конус — *описанным около усеченной пирамиды*), если ее основания вписаны в основания усеченного конуса.	Усеченная пирамида называется *описанной около усеченного конуса* (усеченный конус — *вписанным в усеченную пирамиду*), если основания пирамиды описаны около оснований конуса.

Пусть дан двугранный угол $\beta a \gamma$ с ребром a. Проведем полуплоскость α (с этим же ребром a), разбивающую этот двугранный угол на два равных двугранных угла. Полуплоскость α называется (по аналогии с планиметрией) ***биссектором двугранного угла***.

Геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его граней, называется ***пространственной биссектрисой угла***.

Занятие 20. Конспект

Аксиомы объема тела

1. Объем тела есть положительное число.
2. Объемы равных тел равны.
3. Если тело состоит из нескольких частей (точнее: если тело есть объединение нескольких тел, пересечение любых двух из которых не является телом), то объем тела равен сумме объемов всех частей.
4. Если длина ребра куба равна единице длины, то объем куба равен единице объема.

Объем произвольного прямого цилиндра

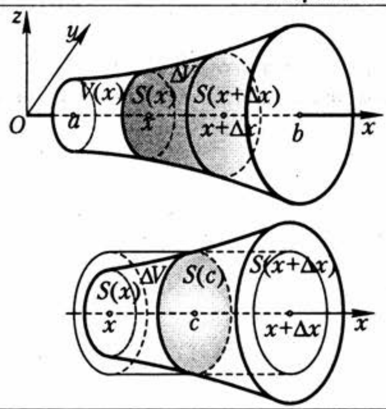
Объем прямого цилиндра с произвольным основанием B_i и высотой h находится по формуле: $V_h^{B_i} = \varphi(h)\ S_i = S_i h$.

Следствия

1. Объем прямого кругового цилиндра находится по формуле $V = \pi R^2 H$, где R — радиус основания цилиндра, H — высота цилиндра.
2. Объем произвольной прямой призмы, прямого и прямоугольного параллелепипедов, а также куба находится по одной и той же формуле $V = SH$, где S — площадь основания многогранника, H — его высота.

Занятие 22. Конспект

Теорема 10



$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \ldots = S(c)$$

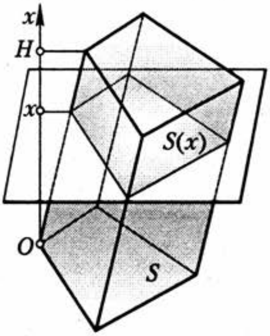
$$\Delta x \to 0 \to \ c \to x$$
$$S(c) \to S(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \ldots = S(x)$$
$$V'(x) = S(x)$$

Если для данного тела известны площади $S = S(x)$ всех его поперечных сечений плоскостями, перпендикулярными к некоторому направлению, принятому за ось Ox, при этом $S(x)$ является непрерывной функцией на отрезке $[a; b]$, то $V'(x) = S(x)$.

Доказательство
1) Учтем, что каждому значению x соответствует некоторое тело с объемом $V(x)$; 2) придадим значению x приращение Δx. Значению $x + \Delta x$ будет соответствовать новое тело с объемом $V(x + \Delta x)$; 3) отрезку длиной Δx будет соответствовать часть тела с объемом $$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x);$$ 4) рассмотрим тело с объемом ΔV отдельно. Так как $S(x)$ является непрерывной функцией от x, то на отрезке $[x; x + \Delta x]$ найдется точка c такая, что тело с объемом ΔV можно заменить равным по объему прямым цилиндром с основанием $S(c)$ и высотой Δx. Объем этого цилиндра равен $S(c)\Delta x$. Значит, $\Delta V = S(c)\Delta x$; 5) тогда $\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{S(c)\Delta x}{\Delta x} = S(c)$; 6) если $\Delta x \to 0$ (Δx стремится к нулю), то $(x + \Delta x) \to x$, а следовательно, и $c \to x$. Поэтому $S(c) \to S(x)$; 7) получаем, что при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta V}{\Delta x} = S(c) \to S(x)$, т. е. $V'(x) = S(x)$. Это означает, что первообразная $V(x)$ равна $S(x)$.
Следствия
1. Если $V'(x) = S(x) = ax^2 + bx + c$, то $V(x) = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx$. 2. Пусть V — объем тела, соответствующего отрезку $[a; b]$, тогда $V = V(b) - V(a)$. 3. Пусть V — объем тела, имеющего высоту H и $S(x) = ax^2 + bx + c$, тогда $$V = V(H) = \frac{aH^3}{3} + \frac{bH^2}{2} + cH.$$

Занятие 23. Конспект

Теорема 11	
Объем произвольной призмы, в частности объем наклонного параллелепипеда, находится по формуле $V = SH$, где S — площадь основания, H — высота тела.	
Доказательство	
	1) Пусть $S(x)$ — площадь сечения призмы (в частности, наклонного параллелепипеда) плоскостью, параллельной плоскости основания и отстоящей на расстояние x от нее. При любом x площади таких сечений равны площади основания: $S(x) = S$; 2) итак, $V'(x) = S(x) = S$; 3) зная производную объема, находим сам объем: $V(x) = Sx$; 4) тогда для высоты тела H искомый объем $V = V(H) = SH$.

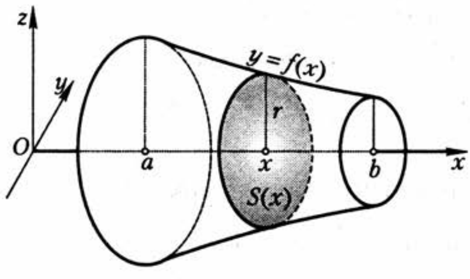
Занятие 25. Конспект 1

Теорема 12

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, двумя прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком оси Ox, вращается вокруг оси Ox, то

$$V'(x) = S(x) = \pi f^2(x).$$

Доказательство

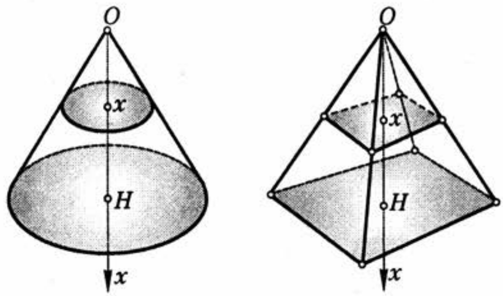


Площадь $S(x)$ можно выразить следующим образом: $S(x) = \pi r^2$, где r — радиус вращения, соответствующий координате x. Очевидно, что $r = f(x)$.

Тогда $S(x) = \pi f^2(x)$.

Поэтому $V'(x) = S(x) = \pi f^2(x)$.

Теорема 13
Объем конуса (пирамиды) равен одной трети произведения площади основания и высоты: $$V_{к} = \frac{1}{3}SH.$$
Доказательство



1) Пусть OH — высота конуса (пирамиды). Начало оси Ox поместим в вершину конуса (пирамиды). На расстоянии x от точки O проведем сечение, перпендикулярное к оси Ox. Полученное сечение будет подобно основанию; коэффициент подобия равен $\frac{x}{H}$. Поэтому площадь сечения

$$S(x) = \left(\frac{x}{H}\right)^2 S,$$

где S — площадь основания конуса (пирамиды);

2) имеем: $V'(x) = S(x) = \left(\frac{x}{H}\right)^2 S = \frac{S}{H^2}x^2;$

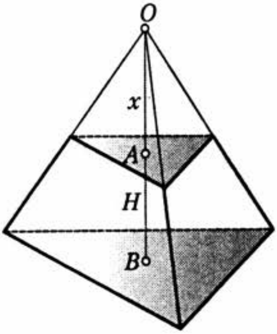
3) так как $\frac{S}{H^2}$ — константа, то $V(x) = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3};$

4) так как высота тела равна H, то $V_{к} = V(H) = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}SH.$

Теорема 14

Объемы усеченной пирамиды и усеченного конуса находятся по одной и той же формуле $V=\frac{1}{3}H(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$, где H — высота тела, S_1 и S_2 — площади оснований.

Доказательство



$$\frac{S_1}{S_2}=\dots$$
$$x=\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}$$

$$V=\frac{1}{3}(H+x)\,S_2-\frac{1}{3}xS_1=\dots$$

Пусть $AB=H$ — высота усеченного тела. Дополним усеченное тело до полного.

Пусть $OA=x$ — высота достроенного тела.

Тогда по теореме об отношении параллельных сечений имеем:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{x^2}{(x+H)^2}\Rightarrow\frac{x}{x+H}=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}\Rightarrow x=\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}.$$

Объем усеченного тела найдем как разность объемов двух полных тел с основаниями S_2 и S_1 и соответственно высотами $x+H$ и x:

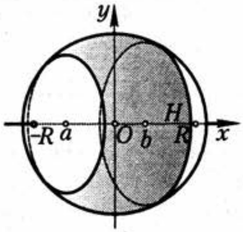
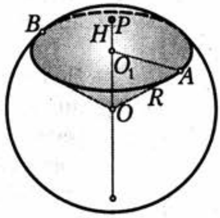
$$V=\frac{1}{3}(H+x)S_2-\frac{1}{3}xS_1=\frac{1}{3}(HS_2+x(S_2-S_1))=$$

$$=\frac{1}{3}\left(HS_2+\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}(S_2-S_1)\right)=\frac{1}{3}H\left(S_2+\sqrt{S_1S_2}+S_1\right).$$

Следствие

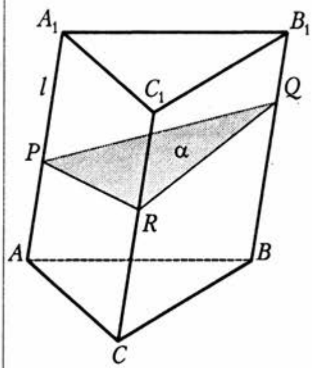
Объем усеченного конуса $V=\frac{1}{3}\pi H(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)$, где H — высота усеченного конуса, R_1 и R_2 — радиусы его оснований.

Занятие 29. Конспект

Теоремы 15
 
Пусть R — радиус шара. 1. Объем шарового пояса (слоя), заключенного между плоскостями $x = a$ и $x = b$, $$V = \pi R^2(b-2)-\frac{\pi}{3}(b^3-a^3).$$ 2. Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. 3. Объем шарового сегмента $V = \pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$, где H — высота сегмента. 4. Объем шарового сектора $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.
Доказательства
1. 1) В данном случае $S(x) = \pi(R^2 - x^2) = \pi R^2 - \pi x^2$; 2) тогда $V'(x) = S(x) = \pi R^2 - \pi x^2$; 3) находим, что $V(x) = \pi R^2 x - \pi\left(\frac{x^3}{3}\right)$; 4) получаем искомый объем: $$V = V(b)-V(a) = \left(\pi R^2 b-\frac{\pi b^3}{3}\right)-\left(\pi R^2 a-\frac{\pi a^3}{3}\right) = \pi R^2(b-a)-\frac{\pi}{3}(b^3-a^3).$$ **2.** Для нахождения объема всего шара надо взять $a = -R$, $b = R$. Тогда объем шара $$V = \pi R^2(R-(-R))-\frac{\pi}{3}(R^3+R^3) = \pi R^2\cdot 2R-\frac{\pi}{3}\cdot 2R^3 = 2\pi R^3-\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Занятие 30. Конспект

Определения



Под ***площадью поверхности многогранника*** понимается сумма площадей всех его граней.

Под ***перпендикулярным сечением призмы*** понимается многоугольник, получаемый при пересечении плоскости, перпендикулярной к боковому ребру, с боковыми гранями. (Плоскость пересекает каждую боковую грань!)

Теоремы 16

1. Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению бокового ребра на периметр перпендикулярного сечения.

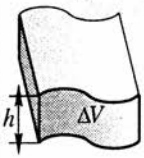
2. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению бокового ребра на периметр ее основания.

3. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему боковой грани.

4. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему боковой грани.

Занятие 32. Конспект

Определения



Пусть имеется некоторая поверхность. Покроем эту поверхность с одной стороны слоем толщиной h.

Пусть $\Delta V(h)$ — объем такого слоя.

Площадью S кривой поверхности будем называть число, к которому стремится отношение $\frac{\Delta V}{h}$ при $h \to 0$.

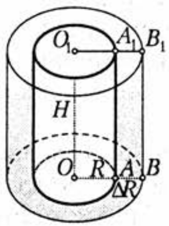
Это определение можно записать так: $S = V'(h)$.

Слой, о котором говорится в определении, называется ***нормальным слоем*** поверхности.

Теорема 17

Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту: $S = 2\pi RH$.

Доказательство



Пусть дан цилиндр с радиусом основания R и высотой H. Дадим радиусу R приращение ΔR, не изменяя высоты H. Нормальный слой боковой поверхности данного цилиндра можно рассматривать как тело, получаемое при вращении ______________________________.

Объем цилиндра получает приращение ΔV, равное объему нормального слоя.

В данном случае $\frac{\Delta V}{h} = \frac{\Delta V}{\Delta R}$.

Найдем число, к которому стемятся эти отношения, если h и ΔR стремятся к нулю.

При $\Delta R \to 0$ отношение $\frac{\Delta V}{\Delta R} \to V'(R)$. Значит, $S = V'(R) =$ ______________.

Следствие

Площадь полной поверхности цилиндра $S = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R)$.

Теорема 18

1. Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности его основания на образующую: $S = \pi Rl$.

2. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна половине произведения суммы длин окружностей его оснований на образующую: $S = \frac{C_1 + C_2}{2} l$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ПРОГРАММА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ*

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Актуальность факультативных занятий по математике

Бесспорно, что овладение практически любой современной профессией требует определенных знаний по математике. С математикой тесно связана и «компьютерная грамотность», широкое распространение которой стало неотъемлемой чертой нашего времени. Математические знания — необходимая частью общей культуры, средство всестороннего развития личности. В школе математика является опорным предметом, обеспечивающим изучение на должном уровне как естественных, так и гуманитарных дисциплин. Необходимо отметить, что математика — это профилирующий предмет в вузах по широкому спектру специальностей. Наряду с теми, кто поступает на математические факультеты и в технические вузы, вступительные экзамены по математике (централизованное тестирование) сдают будущие физики, химики, биологи, врачи, психологи, экономисты.

Как и в прежние годы, современная школа призвана решать две тесно связанные друг с другом задачи: с одной стороны, обеспечить овладение учащимися твердо установленным и четко очерченным минимальным объемом знаний и умений, необходимых каждому члену нашего общества, с другой — создать условия для дополнительного изучения школьного курса математики тем, кто проявляет интерес и склонность к данному предмету. Свой вклад в решение этих задач призваны сделать факультативные занятия, которые по определению являются дополнительной необязательной формой обучения, выбираемой учащимися по желанию.

Общие цели и задачи факультативных занятий по математике

В настоящее время ведется интенсивная разработка и корректировка нормативного и учебно-методического обеспечения математического образования в условиях современной образовательной среды общеобразовательных учреждений, повышения качества обучения предметам естествен-

* См.: Матэматыка : праблемы выкладання. — 2010. — № 5. — С. 48–64.

но-математического цикла с учетом запросов и потребностей общества. Частью этой разработки является создание методических материалов для организации и проведения факультативных занятий по предметам естественно-математического цикла в условиях современной образовательной среды.

Основной задачей факультативных занятий является создание максимально благоприятных условий для интеллектуального развития учащихся в соответствии с их интересами, целями, способностями и потребностями. На факультативных занятиях учащиеся имеют возможность прежде всего улучшить знания, получаемые на уроках по основному курсу, приобрести более прочные умения в решении математических задач. Из-за существенного повышения роли факультативов для их проведения отводится семь лет (5—11 классы).

Изучение потребностей практики обучения показало, что наибольшую пользу факультативные занятия приносят, если они используются для дополнения, расширения и коррекции знаний учащихся по основному курсу, для решения задач повышенной трудности, использования различных форм кружковой работы.

Факультативный курс «Школьная геометрия: многообразие идей и методов» является своего рода сопровождением базового и повышенного курсов, посильно расширяя и дополняя эти курсы. В содержании данного факультативного курса с учетом рамок базового и повышенного курсов делается больший акцент на математические методы, являющиеся основным инструментом изложения теории и решения задач.

Каждая тема факультатива непосредственно связана с материалом общеобразовательного курса математики. При этом программа предусматривает достижение двоякой цели: во-первых, довести изучаемый материал до того уровня, на котором учащемуся становится ясным его принципиальная математическая важность, до известной степени завершенности; во-вторых, показать непосредственные связи школьной математики с наукой и ее приложениями.

Материал курса не дублирует вузовские программы, но в целом ряде случаев позволяет с общих позиций взглянуть на школьную математику и подчеркнуть единство предмета и метода математической науки. Поэтому важно в рамках данного факультативного курса идти не от вузовских курсов, адаптируя их к школьникам, а показывать, каким образом из материала школьного курса математики возникают общие концепции, обладающие теоретической и прикладной ценностью, которые впоследствии сыграют роль своего рода пропедевтики для изучения вузовских курсов математики.

Факультативный курс «Школьная геометрия: многообразие идей и методов» содержит разнообразные темы как теоретического, так и прикладного плана. Предполагается, что в процессе занятий будет показана история возникновения и развития ряда изучаемых методов, концепций и идей, их значение для математики, для других наук и областей практической деятельности.

В предлагаемом факультативном курсе развитие его содержания обеспечивается путем раскрытия многообразия идей и методов школьной геометрии, решения содержательных задач. На факультативных занятиях учащимся будут предлагаться задачи занимательного характера, исторические сведения. Учащиеся имеют возможность выступить с лекцией, провести под руководством учителя экскурсию на интересующее их предприятие или в учебное заведение, подготовить и сделать доклад по выбранной тематике. Надеемся, что такой факультатив окажется интересным и полезным и тем учащимся, которые не проявляют специального интереса и склонности к занятиям математикой, но хотят расширить свой кругозор.

На *первом этапе* (5—9 классы) особое внимание следует уделить формированию устойчивого познавательного интереса к предмету, выявлению и развитию математических способностей учащихся. Обучение на *втором этапе* (10—11 классы) должно обеспечить подготовку к поступлению в вуз, продолжению образования и к профессиональной деятельности, требующей глубоких и прочных знаний, умений и навыков, высокой математической культуры.

Образовательные цели факультативных занятий. Эти цели следующие: ознакомление учащихся с основными математическими методами в процессе систематического изучения геометрических фигур и их свойств, систематизации и углубления знаний об измерении геометрических величин, углубленного изучения геометрических построений и преобразований, координат и векторов, приобретения умений и навыков в решении задач повышенной сложности.

Основным является традиционное содержание. К ведущим содержательным линиям данного факультативного курса относятся: геометрические фигуры и их свойства; измерение геометрических величин; геометрические построения и преобразования; координаты и векторы. В 10 классе: аксиоматический метод в стереометрии, взаимное положение прямых и плоскостей в пространстве, конструктивные методы, координатный и векторный методы в стереометрии. Наибольшее внимание уделяется изучению именно этого материала и связывается с практикой решения содержательных геометрических задач, с решением задач повышенной сложности.

Как и в предыдущих классах, акцент делается на раскрытие математических идей и методов школьной геометрии.

Развивающие цели факультативных занятий призваны:

• развить познавательный интерес;

• развить логическое мышление, наблюдательность, воображение, математическую интуицию, математическую речь;

• развить умственные способности: гибкость, критичность и глубину ума, самостоятельность и широту мышления, память, способность к цельности восприятия, генерирование идей, укрупнение информации и др.;

• сформировать исследовательский навык применения методов научного познания (анализ и синтез, абстрагирование, обобщение и конкретизация, индукция и дедукция, классификация, аналогия и моделирование и др.);

• развить общие учебные умения: постановка учебной цели, выбор средств ее достижения, структурирование информации, выделение главного и т. д.

Воспитательные цели факультативных занятий обязаны помочь:

• сформировать мировоззренческие представления о математике как части общечеловеческой культуры, о роли математики в общественном прогрессе;

• развить и углубить познавательный интерес к математике, стимулировать самостоятельность учащихся в изучении теоретического материала и решении задач повышенной сложности, создать ситуацию успеха по преодолению трудностей, воспитать трудолюбие, волевые качества личности;

• стимулировать исследовательскую деятельность учащихся, активное участие их во внеклассной работе по математике, в математических олимпиадах;

• воспитать нравственные качества личности (настойчивость, целеустремленность, творческую активность и самостоятельность, трудолюбие и критичность мышления, дисциплинированность, способность к аргументированному отстаиванию своих взглядов и убеждений);

• раскрыть красоту математической теории, совершенство математического доказательства, точность в постановке математической задачи, рациональность ее решения, раскрыть связи курса математики с архитектурой, живописью, музыкой, скульптурой.

Дидактическая основа организации факультативных занятий. В основу теоретического обоснования и практических разработок нормативного и учебно-методического обеспечения математического образования положен *средовый подход*, разрабатываемый Национальным институтом образования. При реализации средового подхода образовательное содержание учебного предмета *не передается учащимся напрямую*. Каждый обучаемый конструирует и создает в результате деятельности внутреннее содержание образования, отличающееся от внешне заданного с учетом его возможностей и потребностей в ходе разнообразной учебной деятельности, коллективной коммуникации, сопоставления полученных результатов с культурно-историческими аналогами и другими аспектами. Возможности средового подхода расширяются в связи с созданием учебно-методических комплексов нового поколения, предусматривающих включение *электронных учебных изданий и средств обучения*.

Средовый подход рассматривается как общая дидактическая основа организации обучения в современной общеобразовательной школе, повышения качества знаний. В противовес технократическому подходу акцент в построении содержания обучения на факультативных занятиях должен быть сделан на усвоение идей и методов математики, непосредственно связанных со школьным курсом.

Наиболее массовой и доступной составляющей средового подхода, дополнительного изучения математики являются факультативные занятия.

Организация учебно-воспитательного процесса на факультативных занятиях. Она должна предусматривать:

• *различные организационные формы* (использование внутренней дифференциации и индивидуализации обучения; уроков-лекций, уроков крупноблочного, обзорного изложения теоретического материала с последующей самостоятельной его проработкой, уроков-практикумов, уроков коллективного исследования, уроков с использованием электронных средств обучения; различных форм внеклассной работы по математике);

• *организацию дидактического цикла с учетом особенностей дополнительного обучения*. Авторы рекомендуют такую последовательность звеньев дидактического цикла: опережающее крупноблочное изучение теоретического материала; решение ключевых задач всех уровней сложности; организация фронтальной, групповой и индивидуальной работы учащихся по решению задач, выполнение самостоятельных работ, в том числе и работ исследовательского характера;

• *учет особенностей системы математических задач и упражнений*, которая в пособиях для факультативных занятий является, как правило, избыточной относительно фронтальной формы работы. Часть задач, избыточных относительно фронтальной формы работы, предназначена для организации самостоятельной групповой и индивидуальной работы;

• *развивающее обучение* (обеспечение оптимально возможного уровня трудности и темпа обучения, доступного учащимся; обеспечение внутренней дифференциации обучения, сочетание фронтальной, групповой и индивидуальной работы учащихся);

• *использование проблемных методов обучения*, обучение учащихся эвристическим приемам решения задач, использование доказательства в целях обнаружения теорем, выработку общих учебных умений по отысканию замысла решения задачи, составлению плана решения задачи;

• *сбалансированное выделение времени на изучение теоретического материала и решение задач* (с учетом общего сравнительно небольшого количества часов рекомендуется примерно 1/4 учебного времени выделять на изучение теории и 3/4 — на решение задач);

• *повышение роли самостоятельной работы учащихся* по изучению теоретического материала и решению задач (систематическая самостоятельная работа с учебной и научно-популярной литературой);

• *систематическое решение задач повышенной сложности*, использование этом различных приемов (руководство и помощь со стороны учителя, коллективный разбор и решение задач повышенной трудности, опора на наиболее способных учащихся класса, использование исследовательских заданий для группы учащихся на сравнительно продолжительный срок);

• *использование компьютерной технологии обучения;*

• *использование опыта учителей-новаторов;*

• *стимулирование внеклассной работы учащихся, тесную взаимосвязь с факультативным занятием.*

Содержание обучения в 10 и 11 классах

Выбор тем, как правило, совпадает с выбором, осуществляемым на базовом уровне обучения.

10 КЛАСС

1. Аксиоматический метод в стереометрии. Взаимное положение прямых и плоскостей в пространстве

Аксиомы связи стереометрии и планиметрии, аксиомы принадлежности. Пересекающиеся прямая и плоскость. Параллельные прямые в пространстве. Аксиома параллельности прямых в пространстве. Задание плоскости прямой и точкой, двумя пересекающимися прямыми. Линия пересечения плоскостей, имеющих общую точку. Пересекающиеся плоскости. Примеры многогранников (пирамида, призма). Построение пересечений прямой и плоскости, двух плоскостей. Построение сечений многогранников.

Скрещивающиеся прямые. Признак скрещивающихся прямых. Классификация взаимных расположений двух прямых.

Признак параллельности прямых в пространстве. Свойства параллельности прямых.

Сонаправленные лучи. Углы с соответственно сонаправленными сторонами. Угол между двумя скрещивающимися прямыми. Перпендикулярные скрещивающиеся прямые.

Параллельность прямой и плоскости. Признаки и свойства параллельности прямой и плоскости.

Перпендикулярность прямой и плоскости. Признаки и свойства перпендикулярности прямой и плоскости. Ортогональная проекция на плоскость. Теоремы о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью. Построение и нахождение величины угла между прямой и плоскостью (на примере некоторых многогранников). Формула площади ортогональной проекции многоугольника. Классификация взаимных расположений прямой и плоскости.

Параллельность двух плоскостей. Признаки и свойства параллельности двух плоскостей.

Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Равенство линейных углов двугранного угла. Измерение двугранных углов.

Перпендикулярность двух плоскостей. Признаки и свойства перпендикулярности плоскостей. Угол между двумя плоскостями. Построение угла между двумя плоскостями и нахождение его величины (на примере некоторых многогранников). Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между двумя параллельными плоскостями. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. Построение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым, пересекающим эти прямые, и нахождение его длины (на примере некоторых многогранников).

Многогранный угол. Плоский угол многогранного угла. Свойство плоских углов трехгранного угла. Неравенство для суммы плоских углов выпуклого многогранного угла.

2. Конструктивные методы в стереометрии

Воображаемые (условные) построения в пространстве. Существование пространственных фигур. Примеры воображаемых построений.

Параллельная проекция на плоскость и ее свойства. Изображение фигуры. Построение изображений плоских фигур. Построение изображений пространственных фигур. Построения на изображениях. Построение сечений многогранников.

3. Координатный и векторный методы в стереометрии

Понятие о координатном и векторном методах в стереометрии. Прямоугольная система координат. Координаты точки в пространстве. Вектор. Координаты вектора. Формула расстояния между двумя точками. Формула длины вектора. Формулы координат середины отрезка. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

Нулевой вектор. Коллинеарные, равные, противоположные векторы. Откладывание вектора от данной точки. Признаки и свойства равных векторов. Сложение и вычитание векторов и их свойства. Компланарные и некомпланарные векторы. Правило параллелепипеда.

Умножение вектора на число и его свойства. Разложение вектора по базисным векторам. Скалярное умножение векторов и его свойства.

Уравнения плоскости и сферы. Общее и неполные уравнения плоскости.

Применение координатного и векторного методов в стереометрии.

Ожидаемые результаты обучения

Качественная оценка результатов обучения должна исходить из определенных требований к уровню математической подготовки учащихся и учитывать его динамику, которая обеспечивается факультативными занятиями.

Примерные требования для 10 класса

Геометрические фигуры и их свойства

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• углубить представление о роли аксиом, определений, теорем и доказательств в построении курса стереометрии, приобрести навык в проведении строгих доказательств;

• систематизировать сведения о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве, о двугранных, трехгранных и многогранных углах;

• приобрести навык в классификации стереометрических объектов;

• научиться комплексному применению сведений из теории параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве при изложении теоретического материала и решении задач;

• научиться обосновывать свойства изображений фигур и применять их при выполнении стереометрических чертежей;

• приобрести навык решения геометрических задач повышенной сложности.

При этом учащиеся должны:

• знать и правильно использовать стереометрические термины и их символические обозначения;

• уметь формулировать стереометрические аксиомы и применять их при доказательстве теорем и решении задач;

• уметь изображать плоские и пространственные фигуры на чертеже;

• уметь формулировать определения стереометрических понятий:

а) пересекающихся прямых (прямой и плоскости, двух плоскостей);

б) скрещивающихся прямых;

в) параллельных и перпендикулярных прямых (прямой и плоскости, двух плоскостей);
г) угла между двумя прямыми (прямой и плоскостью, двумя плоскостями);
д) расстояния от точки до прямой (до плоскости);
е) расстояния между двумя прямыми (прямой и плоскостью, двумя плоскостями);
ж) параллельной проекции фигуры на плоскость, изображения фигуры;
з) двугранного и многогранного углов;

- знать и уметь доказывать теоремы:

а) первые следствия из аксиом стереометрии;
б) признак скрещивающихся прямых;
в) признаки и свойства, относящиеся к параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве;
г) свойства изображений плоских и пространственных фигур;

- уметь решать задачи повышенной сложности.

Измерение геометрических величин

Факультативный курс дает возможность учащимся:

- расширить и систематизировать сведения об измерении геометрических величин:

а) расстояния между двумя точками;
б) расстояния между двумя прямыми (прямой и плоскостью, двумя плоскостями);
в) меры угла между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двугранного угла между двумя плоскостями, двумя векторами;

- приобрести навык решения геометрических задач повышенной сложности.

При этом учащиеся должны:

- знать и уметь доказывать свойства:

а) расстояния между различными геометрическими фигурами;
б) меры угла между двумя прямыми (прямой и плоскостью, двумя плоскостями);

- уметь решать стереометрические задачи повышенной сложности, связанные с геометрическими величинами.

Построения и геометрические преобразования

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• систематизировать сведения о методах решения задач на построение в пространстве:

а) воображаемые построения;

б) построения на проекционном чертеже;

• приобрести навык в построении:

а) точки пересечения прямой и плоскости, линии пересечения двух плоскостей, сечений параллелепипеда и пирамиды плоскостью;

б) угла между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями;

в) перпендикуляров, проведенных из точки к прямой и плоскости;

• систематизировать и обобщить сведения о геометрических преобразованиях пространства (движении, преобразовании подобия, симметрии относительно плоскости, центральной симметрии, повороте вокруг оси, осевой симметрии, параллельном переносе, винтовом движении, гомотетии, методе геометрических преобразований);

• уметь решать задачи на построение в пространстве различной сложности;

• уметь решать задачи методом геометрических преобразований.

При этом учащиеся должны:

• понимать смысл терминов:

а) воображаемые построения;

б) построения на проекционном чертеже;

в) этапы решения задачи на построение (анализ, построение, доказательство, исследование);

• уметь решать основные задачи на построение в пространстве и применять их при решении задач на доказательство и вычисление;

• ознакомиться с решением задач методом геометрических преобразований.

Координаты и векторы

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• углубить, расширить и систематизировать сведения о прямоугольной системе координат и векторной алгебре;

• углубить навыки в применении координатного и векторного методов к решению стереометрических и прикладных задач.

При этом учащиеся должны:

• знать и правильно использовать термины, связанные с понятиями прямоугольной системы координат и векторной алгебры;

• знать и уметь доказывать основные факты координатной геометрии:

а) формулы расстояния между двумя точками;

б) формулы координат середины отрезка;

в) выводить уравнения плоскости, сферы, прямой;

• ознакомиться с координатным методом, уметь применять его к решению стереометрических задач различных уровней сложности;

• ознакомиться с векторным методом и его применениями к решению стереометрических задач.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

Журнал «Квант», 1970–2010.

Журнал «Математика в школе», 1998–2010.

Журнал «Матэматыка: праблемы выкладання», 1998–2010.

Задачи областных и республиканских математических олимпиад школьников 1992–1993 гг. / Е. А. Барабанов, В. И. Берник, И. И. Воронович [и др.]. — Могилев : Прогресс, 1993.

Прасолов, В. В. Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. — М. : Наука, 1989.

Рогановский, Н. М. Геометрия : учеб. пособие для 11 кл. / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Нар. асвета, 2007.

Рогановский, Н. М. Геометрия : учеб. пособие для 12 кл. / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Нар. асвета, 2005.

Рогановский, Н. М. Геометрия : учеб. пособие для 12 кл. / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Нар. асвета, 2008.

Рогановский, Н. М. Элементарная математика : в 4 ч. Ч. IV. Геометрия пространства / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2005.

Серия «Библиотеки математического кружка». — М. : Наука.

Тавгень, О. И. Математика в задачах. Теория и методы решений / О. И. Тавгень, А. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2005.

Дополнительная

Амелькин, В. В. Готовимся к экзамену по математике : материалы вступительных экзаменов по математике в БГУ в 2000 г. с решениями и комментариями / В. В. Амелькин, К. С. Филиппович, Н. И. Юрчук. — Минск : ТетраСистемс, 2001. — 192 с.

Амелькин, В. В. Экзамен по математике? Нет проблем : материалы вступительных экзаменов по математике в БГУ в 1999 г. с решениями и комментариями / В. В. Амелькин, К. С. Филиппович, Н. И. Юрчук. — Минск : ТетраСистемс, 2000. — 256 с.

Бахтина, Т. П. Математика : пособие для поступающих в Лицей БГУ / Т. П. Бахтина, И. И. Воронович, Д. В. Синькевич. — Минск : Изд. центр БГУ, 2002.

Болтянский, В. Г. Лекции и задачи по элементарной математике / В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин. — М. : Наука, 1977.

Болтянский, В. Г. Преобразования. Векторы / В. Г. Болтянский [и др.]. — М. : Просвещение, 1964.

Будак, А. Б. Элементарная математика : руководство для поступающих в МГУ / А. Б. Будак, Б. М. Щедрин. — М. : Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1996.

Варианты вступительных экзаменов по математике за 1983—1991 гг. на все факультеты МГУ с ответами, указаниями, решениями. — М. : Патент, 1992.

Вейль, Г. Симметрия / Г. Вейль. — М. : Наука, 1968.

Гельфанд, И. М. Метод координат / И. М. Гельфанд [и др.]. — 5-е изд. — М. : Наука, 1973.

Глейзер, Г. И. История математики в школе : VII—VIII классы / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982.

Градштейн, И. С. Прямая и обратная теоремы / И. С. Градштейн. — М. : Наука, 1965.

Делоне, Б. Задачник по геометрии / Б. Делоне, О. Житомирский. — М. ; Л. : ГИТТЛ, 1952.

Кокстер, Г. С. М. Введение в геометрию / Г. С. М. Кокстер. — М. : Наука, 1968.

Кокстер, Г. С. М. Новые встречи с геометрией / Г. С. М. Кокстер, С. Л. Грейтцер. — М. : Наука, 1978.

Курант, Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. — М. : Просвещение, 1967.

Лоповок, Л. М. Факультативные задания по геометрии для 7—11 классов / Л. М. Лоповок. — Киев : Радянська школа, 1990.

Моденов, П. С. Геометрические преобразования / П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. — М. : Просвещение, 1972.

Морозова, Е. А. Международные математические олимпиады / Е. А. Морозова, И. С. Петраков. — М. : Просвещение, 1967.

Нагибин, Ф. Ф. Математическая шкатулка / Ф. Ф. Нагибин, Е. С. Канин. — М. : Просвещение, 1988.

Нестеренко, Ю. В. Задачи вступительных экзаменов по математике / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. — М. : Факториал, 1995.

Радемахер, Г. Числа и фигуры : Опыты математического мышления / Г. Радемахер, О. Теплиц. — М. : Физматгиз, 1962.

Сборник задач московских математических олимпиад / сост. А. А. Леман. — М. : Просвещение, 1965.

Сборник задач по геометрии для 9 и 10 кл. (Библиотека учителя математики) / И. С. Герасимова [и др.]. — М. : Просвещение, 1977.

Смогоржевский, А. С. Метод координат / А. С. Смогоржевский. — М. : ГИТТЛ, 1952.

Стройк, Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. — М. : Наука, 1984.

Факультативный курс : Избранные вопросы математики. — М. : Просвещение, 1978.

Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике : Решение задач : учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. / И. Ф. Шарыгин. — М. : Просвещение, 1989.

Шубников, А. В. Симметрия в науке и искусстве / А. В. Шубников, В. А. Копцик. — М. : Наука, 1972.

Юшкевич, А. П. История математики в средние века / А. П. Юшкевич. — М. : Физматгиз, 1961.

СОДЕРЖАНИЕ