

10 класс

2-й вариант

2-й тур = 2-й день

10.5. Докажите, что при всех неотрицательных действительных значениях a , b , c выполняется неравенство:

$$a^3 + 64b^3 + 729c^3 \geq 6a^2(bc)^{1/2} + 48b^2(ac)^{1/2} + 162c^2(ab)^{1/2}.$$

10.6. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = p$, где a , b , c и d – различные целые числа, p – простое число, то многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.

10.7. Пусть на плоскости даны 2023 различных точек с целыми координатами. Докажите, что существует отрезок, соединяющий какие-то две данные точки, и на котором лежит не менее 44 точек с целыми координатами (с учетом концевых точек; при этом все эти 44 точки не обязательно входят в число заданных).

10.8. Про высший совет магов известно два факта:

1) каждый член высшего совета дружит ровно с 2022 другими членами высшего совета;

2) для любых 2022 членов высшего совета найдется 2023-й, который дружит с каждым из этих 2022.

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?