10.1. Окружность ω с центром I расположена внутри окружности Ω с центром O. Луч IO пересекает ω и Ω в точках P_1 и P_2 соответственно. На Ω выбрали произвольную точку A, отличную от P_2. Описанная окружность треугольника P_1P_2A повторно пересекает ω в точке X. Прямая AX повторно пересекает Ω в точке Y.

Докажите, что прямые XP_1 и YP_2 взаимно перпендикулярны.

10.2. У натурального числа n ровно 81 натуральных делителей, которые удалось расставить в таблице 9×9 так, что для любых двух чисел, стоящих в одной строке или в одном столбце, одно из них делится на другое.

Найдите максимально возможное количество различных простых делителей числа n.

10.3. Пусть a, b, c — положительные действительные числа, удовлетворяющие равенству $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{ab}{1+c} + \frac{bc}{1+a} + \frac{ca}{1+b} \geqslant \frac{27}{(a+b+c)(3+a+b+c)}.$$

10.4. Определите, какое наибольшее количество чисел возможно выбрать из чисел $1, 2, \ldots, 100$ так, чтобы произведение всех чисел никакого набора выбранных чисел не являлось полным квадратом. (Если набор состоит из одного числа, то это число считаем произведением чисел набора.)