

1. В клетки таблицы размера  $2022 \times 2022$  записаны натуральные числа от 1 до  $2022^2$ , в каждой клетке — ровно одно число, все числа использованы по разу. Для каждой строки Влад выписал себе по одному числу, являющемуся вторым по убыванию в этой строке. А Дима проделал то же для каждого столбца. Оказалось, что мальчики выписали 4044 попарно различных числа и найдутся  $k$  чисел, выписанных Владом, каждое из которых меньше любого числа, выписанного Димой.

Найдите наибольшее возможное значение числа  $k$ .

2. Вписанная окружность прямоугольного треугольника  $ABC$  касается гипотенузы  $AB$  в точке  $P$ , а катетов  $AC$  и  $BC$  — в точках  $Q$  и  $R$  соответственно. Точки  $C_1$  и  $C_2$  симметричны точке  $C$  относительно прямых  $PQ$  и  $PR$ .

Найдите градусную меру угла  $C_1IC_2$ , где  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

3. Числа  $-1011, -1010, \dots, -1, 1, 2, \dots, 1010, 1011$  образуют в некотором порядке последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ .

Найдите наибольшее возможное значение суммы

$$|a_1| + |a_1 + a_2| + |a_1 + a_2 + a_3| + \dots + |a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}|.$$

4. Многочлен  $P(x, y)$  двух переменных с целыми коэффициентами удовлетворяет следующим двум условиям: 1) для каждого целого числа  $a$  существует, причём ровно одно, целое значение  $y$  такое, что  $P(a, y) = 0$ ; и 2) для каждого целого числа  $b$  существует, причём ровно одно, целое значение  $x$  такое, что  $P(x, b) = 0$ .

а) Докажите, что, если степень  $P(x, y)$  равна двум, то он делится на многочлен  $x - y + C$  либо на многочлен  $x + y + C$ , где  $C$  — целое число.

б) Существует ли такой многочлен  $P(x, y)$ , не кратный ни одному многочлену вида  $x - y + C$  и  $x + y + C$ , где  $C$  — целое число?