Республиканская физическая олимпиада 2022 года
(III этап)

Теоретический тур

Решения задач
9 класс
(для жюри)

Уважаемые члены жюри!

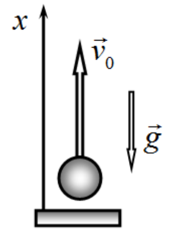
Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 1. Разминка.

Задача 1.1



1.1.1 Так как движение происходит с постоянным ускорением, то закон движения шара имеет вид:

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

1.1.2 Для расчета времени движения, следует решить уравнение

$$h = v_0 \tau - \frac{g\tau^2}{2}, \quad (2)$$

Которое перепишем в традиционном для квадратных уравнений виде:

$$\tau^2 - 2\frac{v_0}{g}\tau + \frac{2h}{g} = 0. \quad (3)$$

1.1.3 Дискриминант этого уравнения равен

$$D = \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{2h}{g} \quad (4)$$

При положительном значении дискриминанта, т.е. при

$$D = \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{2h}{g} > 0 \quad \Rightarrow \quad h < \frac{v_0^2}{2g}. \quad (5)$$

Квадратное уравнение (3) имеет два корня. Физический смысл этого очевиден: шарик будет находиться на высоте h два раза: при движении вверх и при движении вниз.
При

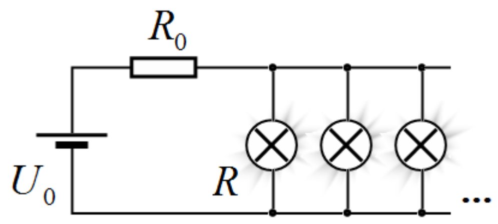
$$D = \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{2h}{g} < 0 \quad \Rightarrow \quad h > \frac{v_0^2}{2g} \quad (6)$$

уравнение (3) решений не имеет, что означает, что шарик не поднимется на такую высоту.

1.1.4 Наконец, при $D = 0$ уравнение имеет единственное решение. При этом величина h принимает максимальное значение

$$S_{\max} = \frac{v_0^2}{2a}. \quad (7)$$

Задача 1.2.



1.2.1 Так как сопротивления всех лампочек одинаковы, то при их параллельном соединении общее сопротивление гирлянды будет равно

$$r = \frac{R}{n}. \qquad (1)$$

В этом случае мощность гирлянды будет равна

$$P = I^2 r = \frac{U_0^2}{(R_0 + r)^2} r. \qquad (2)$$

Для расчета сопротивления гирлянды следует решить квадратное уравнение:

$$\begin{gathered} P = \frac{U_0^2}{(R_0+R)^2} r \quad \Rightarrow \quad (R_0 + r)^2 = \frac{U_0^2}{P} r \quad \Rightarrow \\ R^2 + 2r\left(R_0 - \frac{U_0^2}{2P}\right) + R_0^2 = 0 \end{gathered}. \qquad (3)$$

Это уравнение имеет два корня, если его дискриминант положительный:

$$D = \left(R_0 - \frac{U_0^2}{2P}\right)^2 - R_0^2 = \left(\frac{U_0^2}{2P}\right)^2 - \frac{U_0^2}{P} R_0 = \frac{U_0^2}{2P}\left(\frac{U_0^2}{2P} - 2R_0\right) > 0. \qquad (4)$$

В этом случае корнями уравнения (2) являются

$$R_{1,2} = -\left(R_0 - \frac{U_0^2}{2P}\right) \pm \sqrt{\frac{U_0^2}{2P}\left(\frac{U_0^2}{2P} - 2R_0\right)}. \qquad (5)$$

Поэтому число лампочек, при котором мощность принимает найденное значение должно быть равно

$$n_{1,2} = \left[\frac{R_{1,2}}{R}\right] = \left[\frac{-\left(R_0 - \frac{U_0^2}{2P}\right) \pm \sqrt{\frac{U_0^2}{2P}\left(\frac{U_0^2}{2P} - 2R_0\right)}}{n}\right]. \qquad (6)$$

Здесь квадратные скобки $[\ldots]$ означают целую часть числа. Строго говоря, абсолютно точный ответ на поставленный вопрос может быть получен только при дискретном наборе требуемых мощностей, так как число лампочек – целое число.

1.2.2 При максимальной мощности гирлянды дискриминант уравнения (3) равен нулю, поэтому

$$D \frac{U_0^2}{2P_{\max}}\left(\frac{U_0^2}{2P_{\max}} - 2R_0\right) = 0. \qquad (7)$$

Откуда следует, что

$$\left(\frac{U_0^2}{2P_{\max}} - 2R_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{\max} = \frac{U_0^2}{4R_0}. \qquad (8)$$

Как следует, из формулы (4) эта мощность достигается, если сопротивление нагревателя равно

$$R = -\left(R_0 - \frac{U_0^2}{2P_{\max}}\right) = R_0 . \qquad (9)$$

Итак, сопротивление гирлянды должно быть равно $R_0 = 15{,}5 Ом$. Следовательно, в гирлянду надо включить

$$n = \frac{R_0}{R} = \frac{20{,}0}{1{,}2} = 16{,}7 . \qquad (10)$$

Не целое число лампочек включать в цепь не рекомендуется. Поэтому необходимо рассчитать мощности гирлянды при двух ближайших к 16,7 значений числа лампочек по формуле

$$P = \frac{U_0^2}{\left(R_0 + \frac{R}{n}\right)^2}\frac{R}{n} . \qquad (11)$$

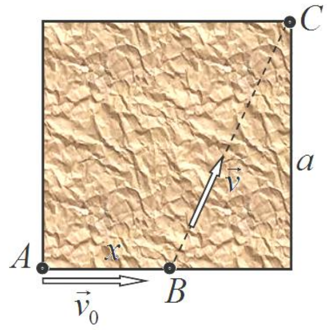
Численные значения этих мощностей равны:

$$\begin{aligned} P_{16} &= 16{,}868 Вт \\ P_{17} &= 16{,}873 Вт \end{aligned} . \qquad (12)$$

Таким образом, окончательный ответ задачи:
Максимальная мощность гирлянды равна $P = 16{,}873 Вт \approx 16{,}9 Вт$ при числе лампочек $n = 17$.

Примечание. Учитывая, что исходные численные значения приведены с точностью до 0,1, то с данной точностью найденная мощность реализуется при числе лампочек от 15 до 19.

Задача 1.3.



1.3.1 Запишем выражение для времени движения при произвольном значении x:

$$t = \frac{x}{v_0} + \frac{n\sqrt{a^2 + (a-x)^2}}{v_0}. \qquad (1)$$

Для определения минимума этой функции воспользуемся уже апробированной методикой. Сформулируем обратную задачу: при каком значении x время движения будет равно t? Для ответа на этот вопрос надо решить уравнение (1), считая неизвестной величиной x. Преобразуем это уравнение:

$$t = \frac{x}{v_0} + \frac{n\sqrt{a^2 + (a-x)^2}}{v_0} \Rightarrow$$
$$(tv_0 - x)^2 = n^2\left(a^2 + (a-x)^2\right) \Rightarrow ((tv_0 - a) + (a-x))^2 = n^2\left(a^2 + (a-x)^2\right) \qquad (2)$$

Для упрощения алгебраических выкладок, обозначим $(a-x) = z$, $(tv_0 - a) = b$. Тогда уравнение упростится:

$$((tv_0 - a) + (a-x))^2 = n^2\left(a^2 + (a-x)^2\right) \Rightarrow$$
$$(b+z)^2 = n^2\left(a^2 + z^2\right) \Rightarrow (n^2-1)z^2 - 2bz + n^2a^2 - b^2 = 0 \qquad (3)$$

Приравняем дискриминант этого уравнения к нулю. В этом случае уравнение (3), а следовательно, и уравнение (2) будут иметь единственное решение, при котором время t минимально:

$$D = 4b^2 - 4(n^2-1)(n^2a^2 - b^2) = 0. \qquad (4)$$

Это условие выполняется при $b = \pm a\sqrt{n^2-1}$. Следует выбрать положительный корень, по смыслу параметра b. Теперь легко находим единственный корень уравнения (3):

$$z = \frac{b}{n^2-1} = \frac{a}{\sqrt{n^2-1}}. \qquad (5)$$

Окончательно получаем, что минимальное время движения достигается при

$$x = a - z = a - \frac{a}{\sqrt{n^2-1}}. \qquad (6)$$

Задание 9-2. Неупругий удар.

Часть 1. Движение в горизонтальной плоскости.

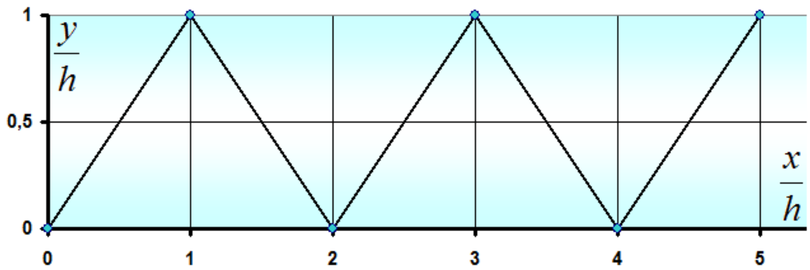
1.1 Согласно принятой модели $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0{,}80$ обе компоненты скорости уменьшаются в одно и тоже число раз, поэтому образуют геометрическую прогрессию со знаменателем γ, после n ударов они будут равны:

$$v_{xn} = v_{yn} = v_0\gamma^n. \tag{1}$$

Так как проекции скорости на выбранные оси координат остаются равными после каждого столкновения, то тело всегда будет двигаться под углами $\pm 45°$ к оси Ox. Следовательно, между ударами будет смещаться на расстояние h, тогда координаты точек столкновения будут равны

$$x_n = nh. \tag{2}$$

1.2 В качестве единицы масштаба разумно выбрать расстояние между стенками. Тогда траектория движения будет очень простой, она показана на рисунке.



1.3 Так как проекции скорости движения убывают в соответствии с формулой (1) времена между столкновениями будут возрастать по закону:

$$\tau_n = \frac{h}{v_0\gamma^n} = \frac{h}{v_0}\gamma^{-n}. \tag{3}$$

Для определения времени n-го столкновения можно рассчитать с помощью формулы для суммы геометрической прогрессии:

$$t_n = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{n-1} = \frac{h}{v_0}\frac{1-\gamma^{-n}}{1-\gamma^{-1}}.. \tag{4}$$

Тогда средняя скорость до n-го столкновения будет равна (учетом того, что между ударами тело проходит расстояние $h\sqrt{2}$):

$$\langle v\rangle = \frac{nh\sqrt{2}}{\frac{h}{v_0}\frac{1-\gamma^{-n}}{1-\gamma^{-1}}} = v_0\frac{n\left(1-\gamma^{-1}\right)}{1-\gamma^{-n}}. \tag{5}$$

Часть 2. Прыжки по горизонтальной поверхности.

2.1 Так как компоненты скоростей после каждого удара остаются равными, то после каждого удара тело будет «стартовать» по углом $45°$ к горизонту. После n ударов компоненты скорости также будут описываться формулой (1):

$$v_{xn} = v_{yn} = v_0\gamma^n. \tag{6}$$

Время между двумя столкновениями полностью определяется вертикальной компонентой скорости и равно:

$$\tau_n = \frac{2v_{yn}}{g} = \frac{2v_{yn}}{g} = \frac{2v_0\gamma^n}{g}. \qquad (7)$$

Смещение в горизонтальном направлении после n-го равно

$$\Delta x_n = v_{xn} \cdot \tau_n = \frac{2v_0^2\gamma^{2n}}{g}. \qquad (8)$$

Тогда координата n-го удара равна сумме предыдущих смещений

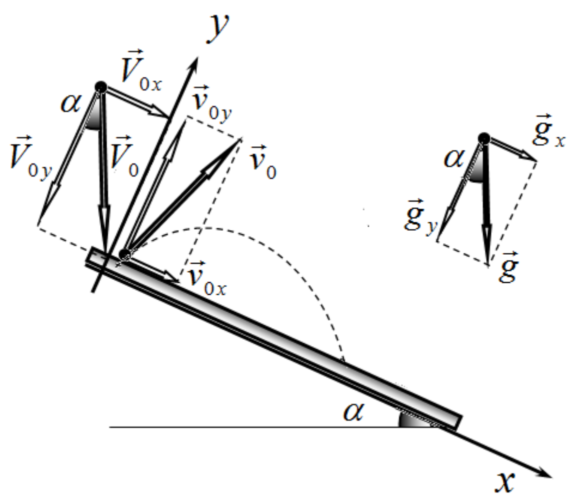
$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{2v_0^2}{g}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma^{2i} = \frac{2v_0^2}{g}\frac{1-\gamma^{2n}}{1-\gamma^2}. \qquad (9)$$

2.2 Из формулы (8) следует, что при $n \to \infty$ координата x_n стремиться к предельному значению, которое и будет максимальным смещением

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2}{g\left(1-\gamma^2\right)}. \qquad (10)$$

Часть 3. Столкновения с наклонной плоскостью.

3.1 Между двумя последовательными ударами движение тела является равноускоренным с ускорением свободного падения $\vec{g}$. Будем решать задачу в системе отсчета, показанной на рисунке. В этой системе проекции ускорения на оси координат равны:



$$\begin{aligned} g_x &= g\sin\alpha \\ g_y &= -g\cos\alpha \end{aligned}. \qquad (11)$$

В момент падения тела на наклонную плоскость (назовем его нулевым ударом) проекции скорости тела на оси координат описываются формулами

$$\begin{aligned} V_{0x} &= V_0\sin\alpha \\ V_{0y} &= -V_0\cos\alpha \end{aligned}. \qquad (12)$$

После удара эти компоненты скорости в рамках принятой модели удара описываются формулами

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \gamma V_0\sin\alpha \\ v_{0y} &= \gamma V_0\cos\alpha \end{aligned}. \qquad (13)$$

После столкновения с плоскость закон движения частицы задается функциями:

$$\begin{cases} x(t) = \gamma V_0 \sin\alpha \cdot t + \dfrac{g\sin\alpha}{2}t^2 \\ y(t) = \gamma V_0 \cos\alpha \cdot t - \dfrac{g\cos\alpha}{2}t^2 \end{cases}. \quad (14)$$

В момент падения координата y обращается в нуль, из этого условия легко найти время τ движения до очередного столкновения:

$$y(\tau) = 0 = \gamma V_0 \cos\alpha \cdot \tau - \frac{g\cos\alpha}{2}\tau^2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \gamma\frac{2V_0}{g}. \quad (15)$$

Тогда координата x в момент первого удара оказывается равной:

$$\begin{aligned} x_1 = x(\tau) &= \gamma V_0 \sin\alpha \cdot \tau + \frac{g\sin\alpha}{2}\tau^2 = \gamma V_0 \sin\alpha \cdot \gamma\frac{2V_0}{g} + \frac{g\sin\alpha}{2}\left(\gamma\frac{2V_0}{g}\right)^2 = \\ &= \gamma^2\frac{4V_0^2\sin\alpha}{g} \end{aligned}. \quad (16)$$

3.2 Рассмотрим, как изменяются проекции скоростей частицы при последовательных соударениях. Если изменение координат описывается функциями (14), то изменение проекций скорости подчиняются следующим выражениям

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \gamma V_0 \sin\alpha + g\sin\alpha \cdot t \\ v_y(t) &= 0 = \gamma V_0 \cos\alpha - g\cos\alpha \cdot t \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда непосредственно перед первым (после нулевого) ударом в момент времени $\tau = \gamma\dfrac{2V_0}{g}$ они оказываются равными:

$$\begin{aligned} v_x(\tau) &= \gamma V_0 \sin\alpha + g\sin\alpha \cdot \tau = \gamma V_0 \sin\alpha + g\sin\alpha \cdot \gamma\frac{2V_0}{g} = 3\gamma V_0 \sin\alpha \\ v_y(\tau) &= 0 = \gamma V_0 \cos\alpha - g\cos\alpha \cdot \tau = \gamma V_0 \cos\alpha - g\cos\alpha \cdot \gamma\frac{2V_0}{g} = -\gamma V_0 \cos\alpha \end{aligned}. \quad (18)$$

А сразу после этого удара

$$\begin{aligned} v_{1,x} &= \gamma\left(3\gamma V_0 \sin\alpha\right) = 3\gamma^2 V_0 \sin\alpha \\ v_{1,y} &= \gamma V_0 \cos\alpha \end{aligned}. \quad (19)$$

Обратим внимание, что нормальная составляющая скорости частицы $v_{1,y}$ оказалась равной аналогичной величине после первого удара! Чтобы «прыжки» были одинаковыми, необходимо, чтобы и v_x компонента восстановилась $v_{1,x} = v_{0x}$. Это произойдет если коэффициент восстановления равен

$$\gamma = \frac{1}{3}. \quad (20)$$

Задание 9-3. Форма полости.

Часть 1. Цилиндрические сосуды.

1.1 Сопротивление между стержнями полностью определяется сопротивлением жидкости, если сопротивление стержней и подводящих проводов пренебрежимо мало. Далее: электрический ток, протекающий между стержнями в жидкости (в плоскости перпендикулярной стержням), локализован в малой области вблизи стержней. Поэтому измеряемое сопротивление не должно зависеть от диаметра сосуда, который заметно превышает расстояние между стержнями. Поэтому Электрическое сопротивление между стержнями должно быть обратно пропорционально высоте уровня налитой жидкости

$$R = \frac{b}{h}. \tag{1}$$

Параметр b имеет смысл электрического сопротивления слоя жидкости толщиной в 1 см.

1.2 По закону Ома измеряемая сила тока равна:

$$I = \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{b} h = \frac{U_0}{b} \frac{4V}{\pi D^2}. \tag{2}$$

При выводе использована формула для объема цилиндра $V = \frac{\pi D^2}{4} h$, из которой выражена зависимость высоты уровня жидкости от объема налитой жидкости. Таким образом, параметр k в экспериментальной зависимости силы тока от объема жидкости равен

$$k = \frac{4U_0}{b\pi D^2}. \tag{3}$$

Эта формула позволяет вычислить значения параметра b для всех использованных сосудов

$$b = \frac{4U_0}{k\pi D^2}. \tag{3}$$

Значение параметра b для трех различных диаметров сосудов приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

$D, см$	$k, Ом \cdot см^{-3}$	$b, Ом \cdot см$
4,0	578	38,10
6,0	1301	37,90
8,0	2312	37,94

1.3 Для всех сосудов значение этого параметра примерно одинаковое, поэтому что подтверждает теоретическую формулу (1) и сделанные при ее выводе предположения.

Часть 2. Конический сосуд.

2.1 Как следует из результатов части 1, сопротивление между стержнями зависит только от высоты уровня жидкости в сосуде и не зависит от его формы. Кроме того, сила тока прямо пропорциональна высоте уровня жидкости h. Из приведенного графика зависимости проводимости от объема налитой жидкости следует, что высота уровня жидкости возрастает быстрее, чем возрастает объем жидкости. Следовательно, сосуд сужается, т.е. использован сосуд **(б)**.

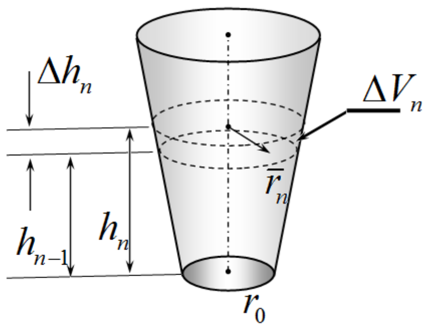
2.2 Для каждого значения объема налитой жидкости V_n по измеренному значению сопротивления $R_n = \frac{U_0}{I_n}$ с помощью формулы (2) можно рассчитать высоту уровня жидкости

$$h_n = \frac{b}{R_n} = \frac{b}{U_0} I_n \qquad (3)$$

Точный теоретический расчет зависимости уровня жидкости в сосуде от ее объема возможен, но является слишком громоздким. Поэтому следует воспользоваться «подсказкой» и упростить методику расчетов. Эти приближенные методы, конечно, имеют некоторую погрешность, но она вполне допустима, так приведенные результаты также имеют некоторую погрешность.

Вычислим изменение уровня жидкости $\Delta h_n = h_n - h_{n-1}$ при добавлении очередной порции жидкости объемом ΔV. С хорошей точностью можно считать, что этот тонкий слой примерно имеет форму цилиндры, поэтому его объем равен

$$\Delta V_n = \pi \bar{r}_n^2 \Delta h_n. \qquad (4)$$



Здесь $\bar{r}_n$ «средний» радиус слоя жидкости толщиной $\Delta h_n = h_n - h_{n-1}$. Приближенно можно считать, что $\bar{r}$ есть радиус сосуда на средней высоте $\bar{h}_n = \frac{1}{2}(h_{n-1} + h_n)$. Из формулы (4), следует, что

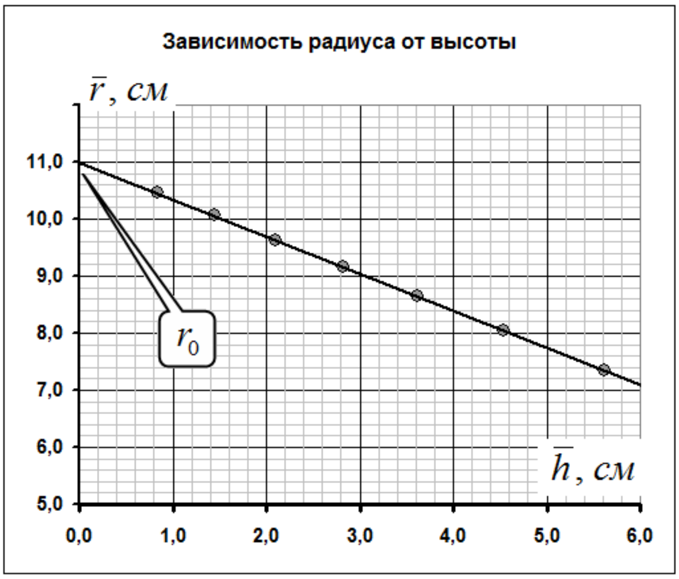
$$\bar{r}_n = \sqrt{\frac{\Delta V_n}{\pi \Delta h_n}}. \qquad (5)$$

Таким образом, требуемая зависимость радиуса сосуда от расстояния до дна задается точками с координатами $(h_n, \bar{r}_n)$. Результаты расчетов этих точек приведены в Таблице 2.

Таблица 2.

$V_n, см^3$	I, A	$h_n, см$	$\Delta h_n, см$	$\bar{h}_n, см$	$\bar{r}_n, см$
200	0,064	0,540			
400	0,133	1,123	0,583	0,832	10,45
600	0,208	1,756	0,633	1,440	10,03
800	0,289	2,440	0,684	2,098	9,65
1000	0,379	3,200	0,760	2,820	9,15
1200	0,479	4,045	0,844	3,623	8,68
1400	0,596	5,033	0,988	4,539	8,03
1600	0,735	6,207	1,174	5,620	7,36
1800	0,915	7,727	1,520	6,967	6,47
2000	1,189	10,040	2,314	8,884	5,25

График зависимости $\bar{r}_n(\bar{h}_n)$ приведен на следующем рисунке. Полученная зависимость линейна, что, во-первых, косвенно подтверждает применимость примененного приближенного метода; во-вторых, указывает, что сосуд действительно имеет форму расширяющегося усеченного конуса.



Для сужающейся конической поверхности теоретически эта зависимость описывается формулой

$$r = r_0 - h \cdot tg\theta. \quad (6)$$

С помощью полученного графика определяем

$$r_0 = 11{,}0 \ см$$
$$tg\theta = 0{,}65 \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 33° \quad (7)$$