

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

11 класс

5. В ряд $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ выписаны все натуральные числа n , при которых в квадрате $n \times n$ можно отметить 50 клеток так, чтобы, какой бы квадрат размера 3×3 ни выделить, в нём будет отмечено нечётное количество клеток.

Чему равно n_{k-2} ?

6. Диаметрами окружностей Ω_1 и Ω_2 являются, соответственно, стороны BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Прямая AC повторно пересекает окружности Ω_1 и Ω_2 в точках B_1 и D_1 соответственно. Прямая BD повторно пересекает окружности Ω_1 и Ω_2 в точках C_1 и A_1 соответственно. Прямые AA_1 и DD_1 пересекаются в точке X , а прямые BB_1 и CC_1 — в точке Y . Окружности Ω_1 и Ω_2 пересекаются в точках P и Q . Прямые XY и PQ пересекаются в точке N .

Докажите, что $XN : NY = 1$.

7. Докажите, что для любого натурального числа n существуют попарно различные натуральные числа a , b и c , отличные от n , такие что каждое из чисел $ab + n$, $bc + n$ и $ac + n$ является полным квадратом.

8. На столе лежит круглый арбуз радиуса R . Над поверхностью стола летают n ос, каждая — на расстоянии $\sqrt{2}R$ от центра арбуза. В какой-то момент осы расположились так, что ни одна из них не видит другую. (Осы не видят друг друга, если отрезок, их соединяющий, пересекает арбуз либо касается его.)

Найдите наибольшее возможное значение n .

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов