

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

8 класс

1. Докажите, что существует такое 2021-значное натуральное число $\overline{a_1a_2 \dots a_{2021}}$, записанное ненулевыми цифрами, что для любого номера n от 1 до 2020 выполнено равенство

$$\overline{a_1a_2 \dots a_n} \cdot \overline{a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{2021}} = \overline{a_1a_2 \dots a_{2021-n}} \cdot \overline{a_{2022-n}a_{2023-n} \dots a_{2021}},$$

причём все четыре числа из этого равенства попарно различны.

2. Даны квадратные трёхчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$, в которых $a > c$. Известно, что, какие бы действительные числа t и s с условием $t + s = 1$ ни выбрать, многочлен $B(x) = tP(x) + sQ(x)$ всегда имеет по крайней мере один действительный корень.

Докажите, что $bc \geq ad$.

3. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. В треугольниках AB_1C_1 , BC_1A_1 и CB_1A_1 отметили соответственно точки H_1 , H_2 и H_3 пересечения их высот.

Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $H_1H_2H_3$ равны.

4. В шеренгу выстроились несколько рядовых. По команде «равняйся!» каждый из них случайным образом повернул голову направо или налево. Каждую секунду все рядовые одновременно делают следующую операцию: 1) если рядовой смотрит направо и видит, что среди тех, кто стоит правее его, большинство смотрит налево, то он поворачивает голову налево; 2) если рядовой смотрит налево и видит, что среди тех, кто стоит левее его, большинство смотрит направо, то он поворачивает голову направо; 3) в остальных случаях рядовой ничего не предпринимает.

Докажите, что в какой-то момент этот процесс остановится.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа