

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

9 класс

1. Центром тяжести многоугольника, нарисованного на координатной плоскости, называется точка, координаты которой равны среднему арифметическому соответствующих координат вершин многоугольника.

Можно ли на координатной плоскости нарисовать два одинаковых многоугольника, у которых нет общих точек, но совпадают центры тяжести?

2. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C построили две окружности равного радиуса так, что они: касаются друг друга в точке Q , касаются гипотенузы AB , а также, одна из них касается катета AC , а другая — катета BC . На катете BC отметили точку P , для которой $\angle PAB = 45^\circ$.

Найдите угол между прямой PQ и гипотенузой AB .

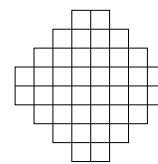
3. Назовём разбиение множества чисел $2^0, 2^1, \dots, 2^{3n-1}$ на тройки $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots, (a_n, b_n, c_n)$ *хорошим*, если каждый из квадратных трёхчленов

$$a_1^2x^2 + b_1x + c_1^4, \quad a_2^2x^2 + b_2x + c_2^4, \quad \dots, \quad a_n^2x^2 + b_nx + c_n^4$$

имеет хотя бы один действительный корень.

Найдите все хороших разбиения, считая разбиения, которые отличаются лишь порядком следования троек, одинаковыми.

4. Ацтекским диамантом порядка n называется фигура на координатной плоскости, состоящая из единичных квадратов, центры которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leq n$. На рисунке справа изображён ацтекский диамант порядка 4.



Можно ли разрезать ацтекский диамант порядка 2020 на фигурки вида $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$, состоящие из четырёх клеток. (Фигурки можно вращать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.)

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов