LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

11 класс

1. На доске записаны 20 различных натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых трёх из них является полным кубом, а произведение любых семи является седьмой степенью некоторого натурального числа.

Найдите наименьшее возможное произведение всех 20 чисел.

Ответ: $(20!)^{21}$.

2. Витя выбрал $n \geqslant 3$ действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что Маша может у некоторых из выбранных чисел поменять знак на противоположный, получив новый набор $b_1, b_2, \ldots, b_n$, так что одновременно будут выполнены неравенства

$$b_1(b_n + b_2) \leqslant 0, \quad b_2(b_1 + b_3) \leqslant 0, \quad \ldots, \quad b_n(b_{n-1} + b_1) \leqslant 0.$$

3. Можно ли на сторонах равностороннего треугольника отметить пять отличных от вершин треугольника точек так, чтобы они являлись вершинами выпуклого пятиугольника, у которого все диагонали равны?

Ответ: нет.

4. На клетчатую доску размера 9×9 выкладывают без наложений уголки вида , образованные тремя клетками (уголок можно поворачивать на угол, кратный 90°, границы уголков идут по линиям сетки).

Какое наименьшее количество уголков необходимо разместить на доске, чтобы больше ни одного уголка выложить было невозможно?

Ответ: 14.