

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

11 класс

1. Окружность пересекает параболу  $y = x^2$  в трёх точках:  $A$ ,  $B$  и  $C$ , причём в точке  $C$  касательные к этим параболе и окружности совпали. Проекция отрезка  $AB$  на ось абсцисс равна 2.

Найдите величину угла  $ACB$ .

2. Найдите все натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , для которых выполнено равенство

$$2^a + 2b^2 = 3^c + 67.$$

3. На высоте  $АН$  остроугольного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $X$ . Прямые  $BX$  и  $CX$  пересекают стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $B_1$  и  $C_1$ , соответственно. Точка  $P$  — основание высоты, опущенной из вершины  $B$  на прямую  $HC_1$ , а точка  $Q$  — основание высоты, опущенной из вершины  $C$  на прямую  $HB_1$ .

Докажите, что описанная окружность треугольника  $PQH$  проходит через середину стороны  $BC$ .

4. В группе из 2020 человек каждый послал по одной открытке каждому своему знакомому из этой группы. Оказалось, что каждый человек получил не более трёх открыток и для каждого человека все его знакомые получили различные количества открыток.

Найдите максимально возможное количество посланных открыток.

---

Пользоваться калькулятором не разрешается.  
Время работы: 5 часов