Вариант 2

Решения заданий теоретического тура

Задание 1. Планетарная система с ретроградным движением

Как известно, все восемь классических планет Солнечной системы обращаются по орбитам вокруг Солнца против часовой стрелки, если смотреть на орбиту со стороны северного полюса. Такое движение называется прямым. Если обращение небесного тела происходит по часовой стрелке, такое движение называется ретроградным. В настоящее время в Солнечной системе обнаружено множество малых тел с ретроградным движением, однако наклонения плоскостей их орбит к плоскости эклиптике и величины эксцентриситетов орбит слишком велики для анализа особенностей их движения.

Рассмотрим модельную планетарную систему с одним объектом с ретроградным движением. В системе имеется звезда с массой $\mathfrak{M} = 2{,}3\mathfrak{M}_{\odot}$, одна планета с ретроградным движение (a_1 = 0,8 а.е., e_1 = 0,005) и две планеты с прямым движением (a_2 = 1,8 а.е., e_2 = 0,004; a_3 = 2,4 а.е., e_3 = 0,003). Здесь a и e – большая полуось и эксцентриситет орбиты планеты, соответственно. Наблюдатель располагается на второй планете, число π = 3,142.

В приближении круговых орбит с нулевыми наклонениями рассчитайте:

1) синодические периоды первой и третьей планеты в земных годах;

2) промежуток времени, за который первая планета переходит из восточной элонгации в нижнее соединение;

3) промежуток времени, за который третья планета переходит из соединения в западную квадратуру.

С учетом эллиптичности орбит рассчитайте:

4) возможный диапазон изменения угла элонгации первой планеты;

5) возможный диапазон изменения расстояния между второй и третьей планетами в квадратурах.

Задание 1. Решение (25 баллов)

1) Вначале найдём сидерические периоды планет, используя третий закон Кеплера

$$a^3 = 2{,}3 \cdot T^2 \quad \rightarrow \quad T = (a^3/2{,}3)^{1/2},$$

откуда получаем: $T_1 = 0{,}472$ *года*, $T_2 = 1{,}592$ *года*, $T_3 = 2{,}452$ *года*.

Синодический период первой планеты с ретроградным движением будет равен

$$S_1 = T_1T_2 / (T_2 + T_1) = 0{,}364 \text{ года},$$

а синодический период третьей планеты с прямым движением составит

$$S_3 = T_3T_2 / (T_3 - T_2) = 4{,}539 \text{ года},$$

2) Определим относительные угловые скорости, а именно, первой и третьей планет относительно второй планеты с наблюдателем:

$$\omega_{отн.1} = 2\pi/S_1 = 17{,}264 \text{ рад/год}, \quad \omega_{отн.3} = 2\pi/S_3 = 1{,}384 \text{ рад/год}.$$

При переходе из восточной элонгации в нижнее соединение первая планета проходит угловое расстояние

$$\varphi_1 = 2\pi - arccos(a_1 / a_2) = 5{,}174\ рад$$

с относительной угловой скоростью $\omega_{отн.1}$, поэтому искомое время

$$\Delta t_1 = \varphi_1 / \omega_{отн.1} = 0{,}300\ года.$$

3) При переходе из соединения в западную квадратуру третья планета проходит угловое расстояние

$$\varphi_3 = \pi - arccos(a_2 / a_3) = 2{,}419\ рад$$

с относительной угловой скоростью $\omega_{отн.3}$ и

$$\Delta t_3 = \varphi_3 / \omega_{отн.3} = 1{,}748\ года.$$

4) Найдем возможный диапазон изменения элонгационного угла ψ для первой планеты с учетом эллиптичности орбит, понимая, что в случае кругового приближения

$$\psi = arcsin(a_1 / a_2).$$

Поэтому для ψ_{max} и ψ_{min} справедливы выражения

$$\psi_{max} = arcsin(Q_1 / q_2) = arcsin[a_1(1+e_1)/ a_2(1- e_2)] = 26{,}648^o = 26^o38^{'}53^{''},$$

$$\psi_{min} = arcsin(q_1 / Q_2) = arcsin[a_1(1- e_1)/ a_2(1+e_2)] = 26{,}110^o = 26^o06^{'}36^{''}.$$

5) Расстояние r между второй и третьей планетами в квадратурах при круговых орбитах определяется, как

$$r = \sqrt{a_3^2 - a_2^2}.$$

Следовательно, учет эллиптичности позволяет рассчитать предельные значения r по формулам:

$$r_{max} = \sqrt{Q_3^2 - q_2^2} = 1{,}606\ а.е.,$$

$$r_{min} = \sqrt{q_3^2 - Q_2^2} = 1{,}568\ а.е..$$

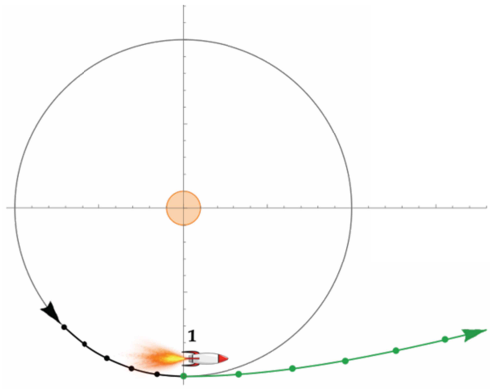
Ответы:

1) S_1 = 0,364 *года* **(3 балла)**, S_3 = 4,539 *года* **(2 балла)**;
2) Δt_1 = 0,300 *года* **(7 баллов)**;
3) Δt_3 = 1,748 *года* **(7 баллов)**;
4) $26^o06^{'}36^{''} \le \psi \le 26^o38^{'}53^{''}$, **(3 балла)**;
5) 1,568 *а.е.* $\le r \le$ 1,606 *а.е.* **(3 балла)**.

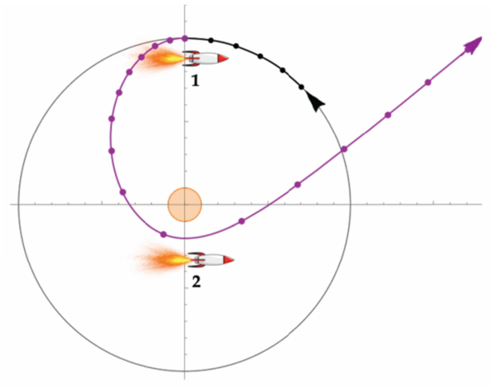
2. Космические манёвры

Космический аппарат (КА) обращается вокруг Луны по круговой орбите со скоростью v_0. Необходимо отправить его на удалённое расстояние при наименьших затратах топлива так, чтобы конечная скорость КА была $v_\infty \neq 0$. Для этого необходимо сообщить КА дополнительную скорость Δv.

В первом случае происходит однократное включение двигателя (одноимпульсный режим, рис. *а*). Во втором случае (двухимпульсный режим, рис. *б*) сначала КА тормозится (первый импульс, положение 1 на рис. *б*), в результате чего КА переходит на эллиптическую орбиту. Затем в периселении этой орбиты (положение 2 на рис. *б*) КА получает второй, ускоряющий импульс. Предполагается, что изменения скорости происходят мгновенно.



а



б

1) Найдите зависимость $\frac{v_\infty}{v_0} = f\left(\frac{\Delta v_\mathrm{I}}{v_0}\right)$ отношения конечной скорости v_∞ к начальной скорости v_0 от отношения дополнительной скорости Δv_I к начальной скорости v_0 в случае одноимпульсного включения двигателя.

2) Найдите зависимость $\frac{v_\infty}{v_0} = f\left(\frac{\Delta v_\mathrm{II}}{v_0}\right)$ отношения конечной скорости v_∞ к начальной скорости v_0 от отношения дополнительной скорости Δv_II к начальной скорости v_0 в случае двухимпульсного включения двигателя.

3) Определите, при каком перигейном расстоянии r_p при заданной конечной скорости v_∞ выполняется условие $\frac{\Delta v_\mathrm{I}}{v_0} = \frac{\Delta v_\mathrm{II}}{v_0}$.

4) Найдите конечную скорость v_∞, для которой выполняется условие из пункта 3).

5) Определите, при каких условиях двухимпульсный режим требует меньших затрат энергии по сравнению с одноимпульсным режимом для достижения заданной конечной скорости v_∞. Ответ обоснуйте.

Задание 2. Решение (25 баллов)

1) Полная энергия КА, находящегося на окололунной орбите:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}. \qquad (1)$$

Для того, чтобы КА смог уйти на удалённое расстояние, его скорость должна удовлетворять условию:

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_\mathrm{dep}^2}{2} - \frac{GMm}{r_\mathrm{dep}}, \qquad (2)$$

где v_dep – скорость ухода (departure), r_dep – расстояние в момент ухода.

Из уравнения (2) получаем:

$$v_{\mathrm{dep}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_{\mathrm{dep}}} + v_\infty^2}. \qquad (3)$$

Импульс, который сообщит КА включение двигателя, равен mv_{dep}, поэтому чем меньше будет v_{dep} при заданной конечной скорости v_∞, тем меньше будет расход топлива.

Для круговой орбиты точка старта не имеет значения, а для эллиптической орбиты более выгодным является старт из периселения, так как здесь r_{dep} минимально, поэтому для достижения заданной конечной скорости v_∞ нужно будет затратить меньше топлива.

Рассмотрим круговую орбиту радиуса r_0. Круговая скорость:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}. \qquad (4)$$

Тогда из (3) и (4) следует

$$v_{\mathrm{dep}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0} + v_\infty^2} = \sqrt{2v_0^2 + v_\infty^2}. \qquad (5)$$

Если начальная скорость КА равна v_0, то скорость ухода:

$$v_{\mathrm{dep}} = v_0 + \Delta v. \qquad (6)$$

Тогда из (5) и (6) для одноимпульсного режима:

$$v_0 + \Delta v_{\mathrm{I}} = \sqrt{2v_0^2 + v_\infty^2},$$

$$\Delta v_{\mathrm{I}} = \sqrt{2v_0^2 + v_\infty^2} - v_0 = v_0\left(\sqrt{2 + \frac{v_\infty^2}{v_0^2}} - 1\right), \qquad (7)$$

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_{\mathrm{I}}}{v_0} + 1\right)^2 - 2}. \qquad (8)$$

2) В случае двухимпульсного режима первый запуск двигателя осуществляется против движения КА, который в результате этого тормозится и переходит на эллиптическую орбиту, для которой точка первого включения двигателя – это точка апоселения:

$$r_0 = r_a. \qquad (9)$$

Из законов сохранения момента импульса и полной энергии для апоселения и периселения

$$r_a v_a = r_p v_p, \qquad (10)$$

$$\frac{v_a^2}{2} - \frac{GM}{r_a} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{GM}{r_p} \qquad (11)$$

получаем выражения для скоростей в апоселении и периселении:

$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{r_a}}\sqrt{\frac{2}{1+\frac{r_a}{r_p}}}, \qquad (12)$$

где $\sqrt{\frac{GM}{r_a}} = v_{0a}$ – «круговая скорость» для апоселения;

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{r_p}}\sqrt{\frac{2}{1+\frac{r_p}{r_a}}}, \qquad (13)$$

где $\sqrt{\frac{GM}{r_p}} = v_{0p}$ – «круговая скорость» для периселения.

Изменение скорости после первого импульса:

$$\Delta v_1 = v_a - v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_a}}\sqrt{\frac{2}{1+\frac{r_a}{r_p}}} - \sqrt{\frac{GM}{r_0}}.$$

Т.к. $r_0 = r_a$ (9), то

$$\Delta v_1 = -v_0\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\frac{r_a}{r_p}}}\right), \qquad (14)$$

где знак минус означает потерю скорости.

Второй импульс в периселении орбиты сообщает дополнительную скорость Δv_2:

$$\Delta v_2 = v_{\text{dep}} - v_p.$$

Скорость v_{dep} из (3), где $r_{\text{dep}} = r_p$; скорость v_p из (13):

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_p}}\left(\sqrt{2 + \frac{r_p v_\infty^2}{GM}} - \sqrt{\frac{2}{1+\frac{r_p}{r_a}}}\right). \qquad (15)$$

Полное изменение скорости:

$$\Delta v_{\text{II}} = |\Delta v_1| + \Delta v_2. \qquad (16)$$

Величина $\sqrt{\frac{GM}{r_p}}$ может быть выражена через круговую скорость $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$:

$$\sqrt{\frac{GM}{r_p}} = v_0\sqrt{\frac{r_0}{r_p}}. \qquad (17)$$

Тогда из (14)-(17) получаем:

$$\Delta v_{\text{II}} = v_0\left(1 + \sqrt{\frac{v_\infty^2}{v_0^2} + \frac{2r_0}{r_p}} - \sqrt{2 + \frac{2r_0}{r_p}}\right),$$

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_{\text{II}}}{v_0} - 1 + \sqrt{2 + \frac{2r_0}{r_p}}\right)^2 - \frac{2r_0}{r_p}}. \qquad (18)$$

3) и **4**) Обозначим $\frac{v_\infty}{v_0} = x$ и $\frac{r_0}{r_p} = y$. Тогда, приравняв (8) и (18), получим:

$$\sqrt{2 + x^2} - 1 = 1 + \sqrt{x^2 + 2y} - \sqrt{2 - 2y}.$$

Преобразование этого равенства приводит к следующему условию:

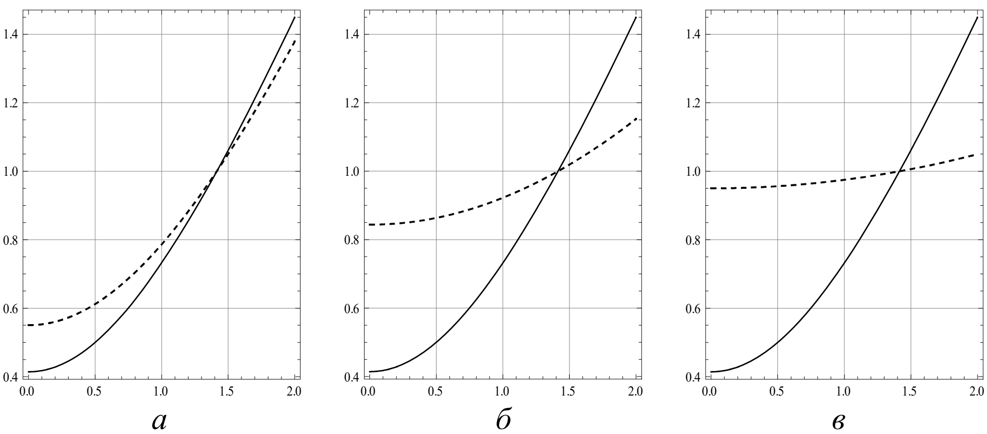
$$x = \sqrt{2}, \qquad (19)$$

которое выполняется при любом периселейном расстоянии.

Условие (19) соответствует параболической скорости:

$$v_\infty = x v_0 = \sqrt{2} v_0.$$

5) На рисунках показаны зависимости отношений $\frac{\Delta v_{\text{I}}}{v_0}$ (сплошная линия) и $\frac{\Delta v_{\text{II}}}{v_0}$ (пунктирная линия) от отношения $\frac{v_\infty}{v_0}$ для трёх различных периселейных расстояний: $0{,}5r_0$ (*а*), $0{,}05r_0$ (*б*) и $0{,}005r_0$ (*в*).



а *б* *в*

Из графиков следует:
если требуется $v_\infty < \sqrt{2}v_0$, то более выгоден одноимпульсный режим;
если требуется $v_\infty > \sqrt{2}v_0$, то более выгоден двухимпульсный режим.

Ответы:

1) $\frac{v_\infty}{v_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_{\mathrm{I}}}{v_0} + 1\right)^2 - 2}$ (**5 баллов**);

2) $\frac{v_\infty}{v_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_{\mathrm{II}}}{v_0} - 1 + \sqrt{2 + \frac{2r_0}{r_p}}\right)^2 - \frac{2r_0}{r_p}}$ (**8 баллов**);

3) при любом (**4 балла**);

4) $v_\infty = \sqrt{2}v_0$ (**2 балла**);

5) при $v_\infty < \sqrt{2}v_0$ более выгоден одноимпульсный режим; при $v_\infty > \sqrt{2}v_0$ более выгоден двухимпульсный режим (**6 баллов**).

Задание 3. Солнечное затмение

При наблюдении солнечного затмения первый астроном увидел идеальное кольцевое затмение с прицельным расстоянием $\tau_{1,min} = 0'$, а второй – только частное затмение, при котором в максимальной фазе край диска Луны прошёл по центру диска Солнца. Угловые радиусы Солнца и Луны, их угловые скорости в этот период имели следующие значения: $\rho_\odot = 16'15''$, $\rho_☾ = 15'00''$, $\omega_\odot = 2{,}46'$/час, $\omega_☾ = 0{,}54$ °/час.

Определите по этим данным:

1) минимальное значение прицельного расстояния для второго астронома;

2) максимальные фазы солнечного затмения для обоих астрономов;

3) полную длительность процесса затмения для второго астронома;

4) длительность кольцеобразного затмения для первого астронома;

5) площадь видимой поверхности Солнца, не перекрытой диском Луны, при максимальной фазе для первого астронома.

Примечания: радиус Солнца $R_\odot$ = 696340 км, число π = 3,142.

Задание 3. Решение (25 баллов)

1) Минимальное значение прицельного расстояния для второго астронома из условия задачи определяется как

$$\tau_{2,min} = \rho_{\text{Луны}} = 15{,}00'.$$

2) Максимальные фазы затмения соответствуют минимальным прицельным расстояниям

$$\Phi_{max} = \frac{\rho_{\text{Солнца}} + \rho_{\text{Луны}} - \tau_{min}}{2\rho_{\text{Солнца}}}.$$

Поэтому искомые фазы оказываются следующими: $\Phi_{max,1} = 0{,}962$, $\Phi_{max,2} = 0{,}5$.

3) Для расчета полной длительности процесса затмения Δt для второго астронома вначале необходимо определить угловой путь φ, который пройдёт центр диска Луны от первого контакта с диском Солнца до второго. Используя математические свойства малых углов можно записать, что

$$\varphi = 2\sqrt{\left(\rho_{\text{Солнца}} + \rho_{\text{Луны}}\right)^2 - \tau_{2,min}^2} = 54{,}83'.$$

Далее находим время

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega_{\text{Луны}} - \omega_{\text{Солнца}}} = 1 \textit{ час } 49 \textit{ минут } 53 \textit{ секунды.}$$

4) Для расчета длительности кольцеобразного затмения $\Delta t_{кол}$ для первого астронома также определяется угловой путь $\varphi_{кол}$, который пройдёт центр диска Луны. В этом случае этот путь составит

$$\varphi_{кол} = 2\left(\rho_{\text{Солнца}} - \rho_{\text{Луны}}\right) = 2{,}50'.$$

Далее находим время

$$\Delta t_{кол} = \frac{\varphi_{\text{кол}}}{\omega_{\text{Луны}} - \omega_{\text{Солнца}}} = 5 \textit{ минут } 6 \textit{ секунд.}$$

5) Максимальная фаза предполагает минимальное прицельное расстояние. При $\tau_{1,min} = 0'$ центры дисков Солнца и Луны совпадают, поэтому в этот момент диск Луны перекрывает часть поверхности Солнца, представляющую собой шаровой сегмент.

Площадь шарового сегмента рассчитывается по формуле

$$S_{ШС} = 2\pi H R_{Солнца}.$$

Высота сегмента H выражается через линейный радиус основания сегмента $R_{ШС}$ как

$$H = R_{\text{Солнца}} - \sqrt{R^2_{\text{Солнца}} - R^2_{\text{ШС}}},$$

который сам связан с радиусом Солнца соотношением

$$R_{\text{ШС}} = R_{\text{Солнца}} \frac{\rho_{\text{Луны}}}{\rho_{\text{Солнца}}}.$$

Проделав расчеты, получим, что $R_{\text{ШС}} = 642775{,}4$ *км*; $H = 428517$ *км*. Поэтому площадь поверхности Солнца закрытая Луной оказывается равной

$$S_{ШС} = 1{,}875 \cdot 10^{12}\ км^2.$$

Тогда искомая незакрытая площадь определится как

$$S_{НЕЗ} = 2\pi R^2_{\text{Солнца}} - S_{ШС} = 1{,}172 \cdot 10^{12}\ км^2.$$

Ответы:

1) $\tau_{2,min} = 15{,}00'$ **(2 балла)**;
2) $\Phi_{max,1} = 0{,}962$, $\Phi_{max,2} = 0{,}5$ **(4 балла)**;
3) $\Delta t = 1$ *час* 49 *минут* 53 *секунды* **(8 баллов)**;
4) $\Delta t_{кол} = 5$ *минут* 6 *секунд* **(3 балла)**;
5) $S_{НЕЗ} = 1{,}172 \cdot 10^{12}$ *км*^{2} **(8 баллов)**.

Задание 4. Транзит Венеры

Прохождение Венеры по диску Солнца (транзит) – это астрономическое явление, при котором Венера движется точно между Солнцем и земным наблюдателем. Транзиты Венеры – достаточно редкие события, наблюдения которых позволяют получить важные астрономические и астрофизические данные о планете. На рисунке 1 показан транзит Венеры 6 июня 2012 года.

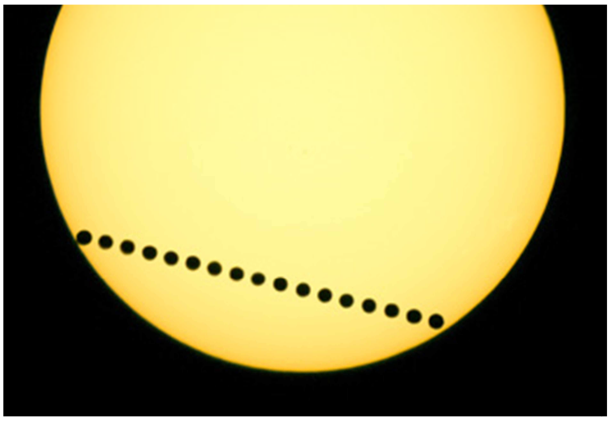


Рисунок 1

В результате наблюдения транзита можно определить видимый диаметр Солнца D_S, видимый диаметр Венеры D, длину траектории транзита L и время транзита t. Эти данные позволяют вычислить геометрические параметры транзита α и β:

$$\alpha = \frac{D}{D_S} \qquad \text{и} \qquad \beta = \frac{L}{D_S}.$$

В таблице приведены геометрические параметры α и β транзита Венеры 6 июня 2012 по результатам серии измерений. Продолжительность транзита $t = 6{,}67$ часа, в это время Земля была близка к афелию своей орбиты, т. е. $d_{ES} = 152{,}1$ млн. км; отношение $\frac{d_{ES}}{D_S} = 109{,}3$.

Таблица

№	α	β
1	0,0214	0,8018
2	0,0203	0,8010
3	0,0218	0,8039
4	0,0182	0,8020
5	0,0205	0,8008
6	0,0190	0,8018
7	0,0206	0,8015
8	0,0210	0,8026
9	0,0198	0,8010
10	0,0191	0,8017
11	0,0187	0,8037
12	0,0211	0,8057

Схема транзита Венеры показана на рисунке 2. Здесь L – видимая длина траектории транзита; D – видимый диаметр Венеры; RS – смещение Венеры за время транзита; TU – смещение Земли за время транзита; O – точка, в которой находился бы наблюдатель, если бы Земля была неподвижна; d_{EV} – расстояние между Землёй и Венерой во время транзита; d_{ES} – расстояние между Землёй и Солнцем во время транзита; d – расстояние между Землёй и точкой O; P и Q – точки, в которых находится центр Венеры в моменты начала и окончания транзита, соответственно.

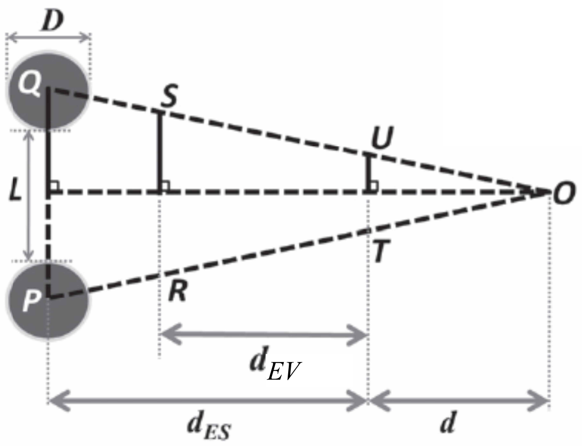


Рисунок 2

Определите по этим данным:
1) смещение Земли TU за время транзита;
2) расстояние d;
3) расстояние между Венерой и Солнцем d_{VS} во время транзитов;
4) смещение Венеры RS за время транзита.

Считайте, что:
- поворотом Земли вокруг собственной оси за время транзита следует пренебречь;
- во время транзита Земля и Венера движутся равномерно по окружностям, лежащим в одной плоскости;
- периоды обращения Венеры и Земли равны $T_V = 224{,}7$ и $T_E = 365{,}25$ дней, соответственно.

Задание 4. Решение (25 баллов)

1) Длина дуги TU мало отличается от длины отрезка TU, поэтому можно записать:

$$TU = v_E t, \qquad (1)$$

где v_E – скорость Земли. Т.к.

$$v_E = \omega_E d_{ES} = \frac{2\pi}{T_E} d_{ES}, \qquad (2)$$

то

$$TU = \frac{2\pi t}{T_E} d_{ES}. \qquad (3)$$

Введём обозначение:

$$\delta_E = \frac{\pi t}{T_E}. \qquad (4)$$

Тогда

$$TU = 2\delta_E d_{ES} = 727 \text{ тыс. км}. \qquad (5)$$

2) Определения геометрических параметров

$$\alpha = \frac{D}{D_S}, \qquad (6)$$

$$\beta = \frac{L}{D_S}. \qquad (7)$$

Исходя из схемы транзита (рисунок 2), рассмотрим три подобных треугольника. Тогда:

$$\frac{\frac{1}{2}TU}{d} = \frac{\frac{1}{2}RS}{d_{ES} - d_{VS} + d} = \frac{\frac{1}{2}(L+D)}{d_{ES} + d}, \qquad (8)$$

где d_{VS} – расстояние между Венерой и Солнцем.
Из (6) и (7) получаем:

$$\alpha + \beta = \frac{D}{D_S} + \frac{L}{D_S} = \frac{L+D}{D_S}. \qquad (9)$$

Тогда из (9):

$$L + D = (\alpha + \beta)D_S. \qquad (10)$$

Длина отрезка *RS*:

$$RS = v_V t, \qquad (11)$$

где v_V – скорость Венеры.

Т.к. во время транзита можно полагать, что планеты движутся равномерно по окружности (время транзита мало по сравнению с периодом обращения), то, по аналогии с (2) – (3) для Венеры можно записать:

$$v_V = \omega_V d_{VS}. \qquad (12)$$

$$RS = v_V t = \frac{2\pi t}{T_V} d_{VS}. \qquad (13)$$

Введём обозначение:

$$\delta_V = \frac{\pi t}{T_V}. \qquad (14)$$

Тогда

$$RS = 2\delta_V d_{VS}. \qquad (15)$$

Подставим (5), (10) и (15) в уравнение (8):

$$\frac{\delta_E d_{ES}}{d} = \frac{\delta_V d_{VS}}{d_{ES} - d_{VS} + d} = \frac{(\alpha+\beta)D_S}{2(d_{ES}+d)}. \qquad (16)$$

Сначала рассмотрим равенство:

$$\frac{\delta_E d_{ES}}{d} = \frac{(\alpha+\beta)D_S}{2(d_{ES}+d)}, \qquad (17)$$

из которого необходимо выразить расстояние *d*:

$$d = \frac{2\delta_E d_{ES}\frac{d_{ES}}{D_S}}{\alpha + \beta - 2\delta_E \frac{d_{ES}}{D_S}} = 265 \text{ млн. км.} \qquad (18)$$

3) Теперь рассмотрим равенство:

$$\frac{\delta_E d_{ES}}{d} = \frac{\delta_V d_{VS}}{d_{ES} - d_{VS} + d}, \qquad (19)$$

из которого выразим d_{VS}:

$$d_{VS} = \frac{\delta_E d_{ES}(d_{ES}+d)}{\delta_V d + \delta_E d_{ES}}. \qquad (20)$$

После подстановки (18) в (20) получим:

$$d_{VS} = \frac{(\alpha+\beta)d_{ES}}{2(\delta_V - \delta_E)\frac{d_{ES}}{D_S} + (\alpha+\beta)} = 108{,}8 \text{ млн. км.} \qquad (21)$$

4) Смещение Венеры рассчитывается по формуле (15):
$RS = 2\delta_V d_{VS} = 845{,}8$ тыс. км.

Ответы:
1) $TU = 2\delta_E d_{ES} = 727$ тыс. км (**5 баллов**);
2) $d = \frac{2\delta_E d_{ES}\frac{d_{ES}}{D_S}}{\alpha + \beta - 2\delta_E \frac{d_{ES}}{D_S}} = 265$ млн. км (**8 баллов**);
3) $d_{VS} = \frac{(\alpha+\beta)d_{ES}}{2(\delta_V - \delta_E)\frac{d_{ES}}{D_S} + (\alpha+\beta)} = 108{,}8$ млн. км (**7 баллов**);
4) $RS = 2\delta_V d_{VS} = 845{,}8$ тыс. км (**5 баллов**).

Задание 5. Формула Планка

Модель абсолютно чёрного тела (АЧТ) применяется для описания теплового электромагнитного излучения звёзд. Физическая простота модели заключается в том, что единственным параметром звезды, определяющим характер излучения, является температура её поверхности.

Основополагающей физической характеристикой АЧТ является спектральная плотность мощности излучения с единицы поверхности ε_ν, которая говорит о том, как эта мощность распределена по частотам во всём диапазоне излучения. При этом излучательная способность АЧТ задаётся формулой Планка

$$\varepsilon_\nu d\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu.$$

Также известно, что положение максимума функции ε_ν зависит от температуры в виде

$$\nu_{(max)} = \xi T,$$

где $\xi = 5{,}88 \cdot 10^{10}$ *Гц/К*.

На основе явного вида спектральной плотности ε_ν:

1) найдите размерность ε_ν в системе СИ и дайте определение единице измерения 1 *Ян*;

2) получите упрощенный вид ε_ν для области высоких частот (фиолетовая часть спектра и далее);

3) получите упрощенный вид ε_ν для области низких частот (инфракрасные волны и далее);

4) определить $\nu_{(max)}$ для звезды Ригель (β Ориона) с температурой $T_P = 12130$ *К*;

5) для Ригеля рассчитайте мощность излучения в среднем инфракрасном диапазоне (MIR) с частотами от 7,5 *ТГц* до 60 *ТГц*;

6) для Ригеля определите более низкую частоту, на которой значение спектральной плотности составляет 10% своего максимума.

Примечания: скорость света в вакууме $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с; постоянная Больцмана $k = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; постоянная Планка $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; число π = 3,142; число *e* = 2,718; радиус Ригеля $R = 79R_\odot$; радиус Солнца $R_\odot = 6{,}955 \cdot 10^8$ *м*; фиолетовая граница спектра имеет $\nu = 790$ ТГц; средина инфракрасного диапазона имеет $\nu = 0{,}6$ ТГц.

Задание 5. Решение (25 баллов)

1) Определим размерность ε_ν:

$$[\varepsilon_\nu] = \left[\frac{h\nu^3}{c^2}\right] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{Гц}}.$$

Единица измерения спектральной плотности 1 Ян = 1 Янский = 1 Jy = $10^{-26}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{Гц}}$.

2) Чтобы упростить формулу ε_ν для высоких частот убедимся, что значение экспоненты в формуле велико

$$\varepsilon_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

И для упомянутых частот при физически оправданных температурах значительно больше единицы. Например, для $\nu = 7{,}5$ *ТГц* и $T = 6000$ *К*

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = e^{6.1} \gg 1.$$

Поэтому единицей можно пренебречь и исходное выражение записать в виде

$$\varepsilon_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

3) Чтобы упростить формулу ε_ν для низких частот убедимся, что значение показателя экспоненты мало. Например, для средины ИК диапазона с частотой ν = 0,6 ТГц при той же температуре T = 6000 K

$$\frac{h\nu}{kT} = 0{,}0048.$$

Следовательно, экспоненту можно разложить в ряд, сохранив первый порядок малости

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT}.$$

Тогда имеем

$$\varepsilon_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \cong \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{kT}{h\nu} = \frac{2\pi kT\nu^2}{c^2} \quad \to \quad \varepsilon_\nu = \frac{2\pi kT\nu^2}{c^2}.$$

4) Найдём $\nu_{(max)}$ для Ригеля

$$\nu_{(max)} = \xi T = 713{,}24\ ТГц.$$

5) Для точного расчета мощности излучения ε_{MIR} с 1 $м^2$ достаточно проинтегрировать ε_ν в указанном диапазоне частот:

$$\varepsilon_{MIR} = \frac{2\pi kT_P}{c^2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \nu^2 d\nu = \frac{2\pi kT_P}{3c^2}(\nu_2^3 - \nu_1^3) \cong 84 \cdot 10^4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Замечание. Здесь необходимо было взять несложный определенный интеграл от полинома, что допустимо для уровня заключительного этапа олимпиады. Для оценки можно использовать различные приближенные методы расчета площади фигуры под кривой спектральной плотности в указанном диапазоне частот. Это может быть метод трапеций, метод центральных прямоугольников и т.д.

Теперь можно рассчитать мощность инфракрасного излучения в диапазоне *MIR* Ригеля в целом

$$\varepsilon_{MIR,\text{Ригеля}} = 4\pi R_P^2 \varepsilon_{MIR} = 3{,}187 \cdot 10^{28}\text{Вт}$$

6) Максимум ε_ν находится в фиолетовой области спектра, и его значение составляет

$$\varepsilon_{\nu_{(max)},\text{Ригеля}} = \frac{2\pi h\nu_{(max)}^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{(max)}}{kT_P}} - 1} = 1{,}064 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{Гц}}.$$

Значит, искомые 10% составляют $1{,}064 \cdot 10^{-7}$ *Вт/м²Гц.*
Тогда для более низких частот

$$\nu = \sqrt[2]{\frac{\varepsilon_\nu}{2\pi kT}} = 95{,}3\ ТГц$$

Полученная частота действительно относится к инфракрасному диапазону.

Ответы:

1) $[\varepsilon_\nu] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{Гц}}$, 1 Ян = 1 Янский = 1Jy = $10^{-26}\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{Гц}}$ **(2 балла)**;
2) $\varepsilon_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{\text{c}^2}e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ **(4 балла)**;
3) $\varepsilon_\nu = \frac{2\pi kT\nu^2}{\text{c}^2}$ **(6 баллов)**;
4) $\nu_{(max)} = 713{,}24\ ТГц$ **(2 баллов)**;
5) $\varepsilon_{MIR,\text{Ригеля}} = 3{,}187 \cdot 10^{28}\text{Вт}$ **(8 баллов)**;
6) ν = 95,3 *ТГц* **(3 балла)**.