Республиканская физическая олимпиада 2022 года
(III этап)

Теоретический тур

Решения задач
10 класс
(для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 10-1. Теплоотдача.

Задача 1.1. Радиоактивный метеорит.

1.1.1 Так как теплопроводность метеорита велика, то можно считать, что во всех его точках температура одинакова. Обозначим V_0 - объем метеорита, S_0 - площадь его поверхности Условие теплового равновесия метеорита (когда мощность теплоты, выделяющейся в объеме метеорита, равна мощности теплоты, уходящей с его поверхности) имеет вид:

$$qV_0 = \alpha S_0 (\Delta t)_0 . \tag{1}$$

Здесь q - мощность теплоты, выделяющейся в единице объема, α - коэффициент теплоотдачи.

При увеличении линейных размеров в n раз площадь его поверхности возрастает в n^2 раз, а объем в n^3 раз. Для большего метеорита уравнение теплового баланса записывается в виде:

$$qn^3 V_0 = \alpha n^2 S_0 (\Delta t)_1 . \tag{2}$$

Из этого условия следует, что разность температур пропорциональна n, поэтому разность температур увеличится в n раз

$$(\Delta t)_1 = n(\Delta t)_0 \tag{3}$$

Задача 1.2. Цилиндрический нагреватель.

1.2.1 При протекании электрического тока в цилиндре выделяется теплота (количество которой определяется законом Джоуля – Ленца). В состоянии теплового равновесия такое же количество теплоты перетекает через поверхность нагревателя в окружающую воду. Уравнение теплового баланса в установившемся режиме будет иметь вид:

$$\frac{U_0^2}{\rho \frac{l_0}{s_0}} = \alpha S_0 (\Delta t)_0 . \tag{1}$$

Здесь l_0 - длина цилиндра, s_0 - площадь поперечного сечения цилиндра; S_0 - площадь внешней поверхности цилиндра. Если все размеры нагревателя увеличить в η раз, то разность температур цилиндра и воды будет удовлетворять соотношению:

$$\frac{U_0^2}{\rho \frac{\eta l_0}{\eta^2 s_0}} = \alpha \eta^2 S_0 (\Delta t)_1 . \tag{2}$$

Из этих уравнений следует, что

$$(\Delta t)_1 = \frac{(\Delta t)_0}{\eta} = \frac{20°C}{1{,}25} = 16°C . \tag{3}$$

При расчете учтено, что температура кипящей воды равна $100°C$.
Таким образом, температура увеличенного цилиндра равна $t_1 = 116°C$.

Задача 1.3. Теплоизоляция.

1.3.1 Условие теплового равновесия в данном случае формулируются следующим образом: поток теплоты от горячей воды к одной стороне пластины (назовем ее первой стороной – горячей) равен потоку теплоты через пластину и равен потоку от второй (холодной) стороны пластины к холодной воде. Так как с разных сторон от стенок трубы находится вода, то коэффициенты теплоотдачи на обеих поверхностях пластины одинаковы. Поэтому условие теплового равновесия выражается следующим образом

$$\alpha(t_0 - t_1) = \frac{\gamma}{h}(t_1 - t_2) = \alpha(t_2 - t_3). \tag{1}$$

Из уравнения (1) следует, что

$$(t_0 - t_1) = (t_2 - t_3). \tag{2}$$

Откуда находим

$$t_1 = t_0 - (t_2 - t_3) = 95°C. \tag{3}$$

1.3.2 Подставим выражение (3) в уравнение теплового баланса:

$$\frac{\gamma}{h}(t_1 - t_2) = \alpha(t_2 - t_3) \;\;\Rightarrow\;\; (t_2 - t_3) = \frac{\gamma}{\alpha h}(t_0 - (t_2 - t_3) - t_2) = \frac{\gamma}{\alpha h}((t_0 + t_3) - 2t_2). \tag{4}$$

Из этого уравнения находим температуру холодной стороны пластины:

$$t_2 = t_3 + \frac{\frac{\gamma}{\alpha h}(t_0 + t_3)}{1 + 2\frac{\gamma}{\alpha h}}. \tag{5}$$

Аналогичное соотношение можно записать для второй пластины, толщина которой в два раза больше:

$$t_{2x} = t_3 + \frac{\frac{\gamma}{2\alpha h}(t_0 + t_3)}{1 + 2\frac{\gamma}{2\alpha h}}. \tag{6}$$

Для расчета численного значения этой температуры сначала из выражения (4) найдем:

$$\frac{\gamma}{h}(t_1 - t_2) = \alpha(t_2 - t_3) \;\;\Rightarrow\;\; \frac{\gamma}{\alpha h} = \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_2} = \frac{5}{80} = 0{,}0625$$

Тогда

$$t_{2x} = t_3 + \frac{\frac{\gamma}{2\alpha h}(t_0 + t_3)}{1 + 2\frac{\gamma}{2\alpha h}} \approx 18°C. \tag{7}$$

Задание 10-2. Молекулярная физика с химией.

Часть 1. Изотермический процесс.

1.1 Так как молекулы AB и B образуются только в результате распада молекулы A_2B, то их количества совпадают $N_2 = N_3$. Число двух молекул A_2B равно общему числу молекул минус число распавшихся молекул: $N_1 = N_0 - N_2$. Так все молекулы находятся в сосуде постоянного объема, то аналогичные соотношения будут выполняться и для концентраций, поэтому

$$\begin{aligned} n_3 &= n_2 \\ n_1 &= n_0 - n_2 \end{aligned}. \tag{1}$$

Так как изначально в сосуде находился один моль молекул, то

$$n_0 = \frac{N_A}{V}. \tag{2}$$

1.2 Изменение числа молекул AB определяется распадом трехатомных молекул и обратной рекомбинацией, поэтому

$$\Delta N_2 = aN_1\Delta t - bN_2 n_3 \Delta t. \tag{3}$$

Разделим это уравнение на объем сосуда и воспользуемся полученными соотношениями для концентраций, в результате чего получим уравнение:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = a(n_0 - n) - bn^2. \tag{4}$$

1.3 В состоянии динамического равновесия изменение концентраций равно нулю, поэтому для определения равновесной концентрации $\bar{n}$ следует решить квадратное уравнение:

$$a(n_0 - n) - bn^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad bn^2 + an - an_0 = 0. \tag{5}$$

Решение этого уравнения выражается формулой:

$$\bar{n} = \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{an_0}{b}} - \frac{a}{2b}. \tag{6}$$

Отрицательный корень этого уравнения отброшен.

1.4 При выполнении условия $a << bn_0$ в формуле (6) следует оставить только слагаемые содержащие большую величину n_0, поэтому в этом приближении

$$\bar{n}_2 = \bar{n}_3 = \bar{n} \approx \sqrt{\frac{an_0}{b}}. \tag{7}$$

Тогда концентрация исходных молекул описывается формулой:

$$\bar{n}_1 = n_0 - \bar{n} \approx n_0 - \sqrt{\frac{an_0}{b}}. \tag{8}$$

Подчеркнем, что число распавшихся молекул (и их концентрация) относительно мало.

1.5 Для расчета давлений удобно использовать известное выражение для давления газа через его концентрацию. Так начальное давление (и давление в сосуде 2) задается формулой

$$P_0 = n_0 k T_0. \tag{9}$$

После изменения концентрация смеси суммарное давление в сосуде 1 давление станет равным:

$$P = nkT_0 = (\bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3)kT_0 = (n_0 + \bar{n})kT_0. \tag{10}$$

Так давление газа при постоянной температуре пропорционально числу молекул (и не важно, каких именно молекул), то возрастание давление обусловлено простым возрастанием числа частиц в сосуде. Окончательно получаем, что установившаяся разность давлений описывается формулой

$$\Delta P = \bar{n}kT_0 = kT_0\sqrt{\frac{an_0}{b}}. \tag{11}$$

1.6 Уравнение (4), описывающее динамику изменения числа частиц, является достаточно сложным дифференциальным уравнением. Решение данного уравнения не требуется. Так для оценки характерного времени установления равновесия можно воспользоваться следующим приближением: считать, что скорость изменения концентрации примерно постоянна до достижения равновесного значения. Учитывая, что начальная концентрация продуктов распада равна нулю, оценка времени имеет вид:

$$\tau \approx \frac{\bar{n}}{\left(\frac{\Delta n}{\Delta t}\right)_0} = \frac{\sqrt{\frac{an_0}{b}}}{(an_0)} = \frac{1}{\sqrt{abn_0}}. \tag{12}$$

Важно подчеркнуть, что время установления равновесия зависит от концентрации молекул. Это связано с тем, что процесс рекомбинации не линейно зависит от концентрации.

Часть 2. Процесс без теплообмена.

2.1 Для решения этой части задания следует учесть несколько существенных обстоятельств.

Первое. Так как процессы происходят без теплообмена и без совершения работы, то газ, находящийся в сосуде 1, является замкнутой системой. Следовательно, его внутренняя энергия сохраняется.

Второе. Если при объединении молекул (рекомбинации) выделяется некоторое количество теплоты, то такое же количество теплоты должно поглотиться при обратной реакции, т.е. при распаде трехатомной молекулы. А так как число распадов больше, чем число объединений, то в целом при химических реакциях в целом произойдет поглощение теплоты. Иными словами, часть внутренней энергии газа (т.е. кинетической энергии теплового движения молекул) перейдет в энергию химических связей. Еще одно пояснение: два атома, объединенные в одну молекулу, обладают отрицательной энергии связи атомов. Поэтому для распада молекулы требуется некоторая энергия.

Третье. Так как по условию задачи скорости реакций не зависят от температуры (хотя в реальности такая зависимость обязательно существует), то значения равновесных концентрация остаются теми же, что найдены в Части 1.

Таким образом, потеря тепловой энергии вследствие протекания химических реакций равна

$$Q = \bar{n}Vq \tag{13}$$

Здесь $\bar{n}V$ - разность между числом распадов и числом слияния.
Запишем теперь уравнение энергетического баланса:

$$\frac{5}{2}RT_0 - \bar{n}Vq = \frac{5}{2}RT\frac{(n_0 - \bar{n})V}{N_A} + \frac{5}{2}RT\frac{\bar{n}V}{N_A} + \frac{3}{2}RT\frac{\bar{n}V}{N_A}. \tag{14}$$

В правой части данного равенства стоит сумма внутренней энергии оставшихся трехатомных молекул и внутренней энергии образовавшихся молекул. Преобразуем данное уравнение (учитывая , что $\frac{\bar{n}V}{N_A} = \frac{\bar{n}}{n_0}$; $\bar{n}Vq = \frac{\bar{n}}{n_0}N_A q$):

$$\frac{5}{2}RT_0 - \frac{\bar{n}}{n_0}N_A q = \frac{5}{2}RT\frac{(n_0 - \bar{n})}{n_0} + \frac{8}{2}RT\frac{\bar{n}}{n_0} = \frac{5}{2}RT\left(1 + \frac{3}{5}\frac{\bar{n}}{n_0}\right). \tag{15}$$

Из этого выражения находим температуру газа после достижения динамического равновесия:

$$T = \frac{T_0\left(1 - \frac{2}{5}\frac{q}{kT_0}\frac{\bar{n}}{n_0}\right)}{1 + \frac{3}{5}\frac{\bar{n}}{n_0}} \approx T_0\left(1 - \frac{2}{5}\frac{q}{kT_0}\frac{\bar{n}}{n_0} - \frac{3}{5}\frac{\bar{n}}{n_0}\right); \tag{16}$$

и изменение температуры:

$$\Delta T = -T_0\left(\frac{2}{5}\frac{q}{kT_0} + \frac{3}{5}\right)\frac{\bar{n}}{n_0} = -T_0\left(\frac{2}{5}\frac{q}{kT_0} + \frac{3}{5}\right)\sqrt{\frac{a}{bn_0}}; \tag{17}$$

Как следует из полученного выражения, температура газа уменьшается, причем по двум причинам: первая, уже описанное преобразование энергии химических связей; вторая – увеличения числа молекул. При увеличении числа частиц, энергия перераспределяется между ними, поэтому энергия, приходящаяся на одну молекулу (а именно эта энергия определяет температуру) уменьшается.

2.2 Расчет давления при изменении числа частиц и температуры не вызывает особых проблем:

$$P = (n_0 + \bar{n})k(T_0 + \Delta T) \approx n_0 kT_0\left(1 + \frac{\bar{n}}{n_0} + \frac{\Delta T}{T_0}\right) = n_0 kT_0\left(1 + \frac{\bar{n}}{n_0} - \left(\frac{2}{5}\frac{q}{kT_0} + \frac{3}{5}\right)\frac{\bar{n}}{n_0}\right). \tag{18}$$

Изменение давления в теплоизолированном сосуде равно

$$\Delta P = P_0\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\frac{q}{kT_0}\right)\frac{\bar{n}}{n_0} = \frac{2}{5}P_0\left(1 - \frac{q}{kT_0}\right)\sqrt{\frac{a}{bn_0}}. \tag{19}$$

Задание 10-3. Скатывание без проскальзывания.

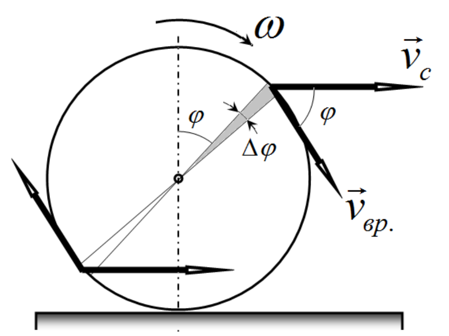
Часть 1. Динамика вращательного движения.

1.1 Так как все точки трубки находятся на одном расстоянии от оси вращения, то модули их скоростей одинаковы и равны

$$v = \omega R. \tag{1}$$

Поэтому кинетическая энергия вращающейся трубки равна

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2}. \tag{2}$$



1.2 Представим движение трубки как сумму поступательного прямолинейного движения ее центра и его вращения вокруг центра. В этом случае разные точки трубки движутся с разными скоростями относительно поверхности. Мысленно разобьем трубку на равные малые участки (полоски вдоль длины трубки), видимые из центра обруча под малым углом $\Delta\varphi$. Рассмотрим один из таких участков, положение которого задается углом φ от вертикали. Полная скорость этого участка складывается из скорости движения центра $\vec{v}_c$ и скорости вращательного движения $\vec{v}_{вр.}$ относительно центра колеса ($\left|\vec{v}_{вр.}\right| = \omega R$). Используя теорему косинусов, легко показать, что квадрат вектора полной скорости выделенного участка равен

$$v^2 = v_c^2 + v_{вр.}^2 + 2v_c v_{вр.}\cos\varphi. \tag{3}$$

Чтобы найти кинетическую энергию всей трубки необходимо просуммировать энергии всех ее участков:

$$E = \sum_i \frac{\Delta m}{2}\left(v_c^2 + v_{вр.}^2 + 2v_c v_{вр.}\cos\varphi_i\right) = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mv_{вр.}^2}{2} + \Delta m v_c v_{вр.}\sum_i \cos\varphi_i \tag{4}$$

Так как суммирование проводится по всем полоскам трубки (по полной окружности), то последняя сумма обращается в нуль. Следовательно, кинетическая энергия трубки равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$E = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}. \tag{5}$$

Чтобы убедиться в справедливости сделанного вывода можно так же рассмотреть два участка, симметричных относительно оси трубки.

1.3 Если трубка катится без проскальзывания, то скорость его центра и угловая скорость вращения связаны соотношением $v_c = \omega R$. В этом случае оба слагаемых в формуле (5) равны, поэтому полная энергия трубки равна

$$E = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = mv_c^2. \tag{6}$$

1.4 Увеличение кинетической энергии системы равно уменьшению потенциальной груза, поэтому

$$\Delta\left(E_1 + E_2\right) = m_0 g \Delta h . \qquad (7)$$

В этой формуле

$E_1 = \dfrac{mR^2\omega^2}{2}$ - кинетическая энергия трубки;

$E_2 = \dfrac{m_0 v^2}{2} = \dfrac{m_0 R^2 \omega^2}{2}$ - кинетическая энергия груза.

Выразим кинетическую энергию груза через кинетическую энергию трубки:

$$E_2 = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 R^2\omega^2}{2} = \frac{m_0}{m}\frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{m_0}{m}E_1$$

И подставим в уравнение (7)

$$\Delta\left(E_1 + E_2\right) = \Delta\left(E_1 + \frac{m_0}{m}E_1\right) = \frac{m + m_0}{m}\Delta E_1 = m_0 g \Delta h . \qquad (8)$$

Из этого выражения находим изменение кинетической энергии трубки

$$\Delta E_1 = \frac{m m_0}{m + m_0} g \Delta h . \qquad (9)$$

1.5 Подставим явное выражение для кинетической энергии трубки и воспользуемся подсказкой из условия:

$$\Delta E_1 = \Delta\left(\frac{mR^2\omega^2}{2}\right) = \frac{mR^2}{2}\Delta\left(\omega^2\right) = \frac{mR^2}{2}\cdot 2\omega\Delta\omega = mR^2\omega\Delta\omega . \qquad (10)$$

Подставим в формулу (9)

$$mR^2\omega\Delta\omega = \frac{m m_0}{m + m_0} g \Delta h . \qquad (11)$$

И разделим его на Δt - промежуток времени, за который груз опустился на величину Δh. Также учтем, что скорость груза можно выразить через угловую скорость вращения трубки: $v = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \omega R$. В итоге получим

$$mR^2\omega\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{m m_0}{m + m_0} g \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{m m_0}{m + m_0} g\omega R \quad \Rightarrow \quad mR^2\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{m m_0}{m + m_0} gR \qquad (12)$$

Отсюда находим угловое ускорение трубки:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta y} = \frac{m_0}{m + m_0}\frac{g}{R} \quad . \qquad (13)$$

А ускорение груза равно:

$$a = \beta R = \frac{m_0}{m + m_0} g \quad . \qquad (14)$$

1.6 Что бы выразить угловое ускорение через силу натяжения нити, ее сначала надо найти. Для этого воспользуемся уравнением второго закона Ньютона для груза:

$$m_0 a = m_0 g - T \quad \Rightarrow \quad T = m_0\left(g - a\right) = m_0\left(g - \frac{m_0}{m + m_0} g\right) = \frac{m_0 m}{m + m_0} g . \qquad (15)$$

Теперь перепишем уравнение (12):

$$mR^2\beta = \frac{mm_0}{m+m_0}gR = TR\,,$$

В итоге получаем уравнение динамики вращательного движения:

$$mR^2\beta = M\,. \qquad (16)$$

1.7 Запишем уравнение динамики вращательного движения в рассматриваемом случае:

$$mR^2\beta = -FR. \qquad (17)$$

Из этого уравнения следует, что угловое ускорение трубки постоянно и равно

$$\beta = -\frac{F}{mR} \qquad (18)$$

Поэтому вращение трубки будет равноускоренным (с отрицательным ускорением), а его угловая скорость будет изменяться по линейному закону:

$$\omega = \omega_0 - \frac{F}{mR}t \qquad (19)$$

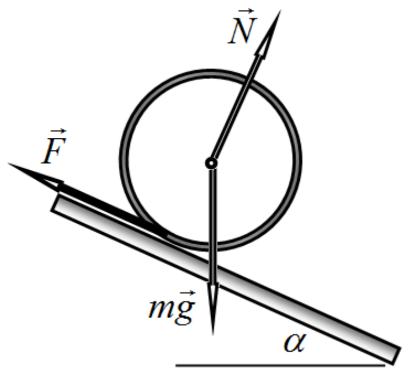
1.8 До остановки трубка повернется на угол

$$\varphi = \frac{\omega_0^2}{2\beta} = \frac{mR\omega_0^2}{2F}\,. \qquad (20)$$

Следовательно, полное число оборотов до остановки равно

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{mR\omega_0^2}{4\pi F}\,. \qquad (21)$$

Часть 2. Скатывание с наклонной плоскости.



2.1 Из уравнения второго закона Ньютона для движения центра масс

$$ma = mg\sin\alpha - F\,, \qquad (21)$$

Находим линейное ускорение оси трубки

$$a = g\sin\alpha - \frac{F}{m}\,. \qquad (22)$$

Теперь запишем уравнение динамики вращения относительно оси трубки (единственной силой, момент которой отличен от нуля, является сила трения):

$$mR^2\beta = FR. \qquad (23)$$

Из этого уравнения определяем угловое ускорение трубки

$$\beta = \frac{F}{mR}\,. \qquad (24)$$

2.2 Если трубка катится без проскальзывания, то линейное и угловые ускорения связаны геометрическим соотношением

$$a = \beta R. \tag{25}$$

Подставим в это соотношения формулы для ускорений (22) и (24)

$$g \sin\alpha - \frac{F}{m} = \frac{F}{m}. \tag{26}$$

Отсюда определяем силу трения

$$F = \frac{1}{2} mg \sin\alpha. \tag{27}$$

2.3 Так как движение происходит без проскальзывания, то данная сила является силой трения покоя. Как следует из закона Кулона – Амонтона сила трения покоя не может быть больше силы трения скольжения, т.е.

$$F \le \mu N = \mu mg \cos\alpha. \tag{28}$$

С учетом формулы (27) это неравенство дает условие качения трубки по наклонной плоскости без проскальзывания:

$$\frac{1}{2} mg \sin\alpha \le \mu mg \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad tg\alpha \le 2\mu. \tag{29}$$