LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

11 класс

5. В ряд $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ выписаны все натуральные числа n, при которых в квадрате $n \times n$ можно отметить 50 клеток так, чтобы, какой бы квадрат размера 3×3 ни выделить, в нём будет отмечено нечётное количество клеток.

Чему равно n_{k-2}?

Ответ: 20.

6. Диаметрами окружностей Ω_1 и Ω_2 являются, соответственно, стороны BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Прямая AC повторно пересекает окружности Ω_1 и Ω_2 в точках B_1 и D_1 соответственно. Прямая BD повторно пересекает окружности Ω_1 и Ω_2 в точках C_1 и A_1 соответственно. Прямые AA_1 и DD_1 пересекаются в точке X, а прямые BB_1 и CC_1 — в точке Y. Окружности Ω_1 и Ω_2 пересекаются в точках P и Q. Прямые XY и PQ пересекаются в точке N.

Докажите, что $XN : NY = 1$.

7. Докажите, что для любого натурального числа n существуют попарно различные натуральные числа a, b и c, отличные от n, такие что каждое из чисел $ab + n$, $bc + n$ и $ac + n$ является полным квадратом.

8. На столе лежит круглый арбуз радиуса R. Над поверхностью стола летают n ос, каждая — на расстоянии $\sqrt{2}R$ от центра арбуза. В какой-то момент осы расположились так, что ни одна из них не видит другую. (Осы не видят друг друга, если отрезок, их соединяющий, пересекает арбуз либо касается его.)

Найдите наибольшее возможное значение n.

Ответ: 6.