LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

10 класс

5. Докажите, что для любого натурального числа n существует бесконечно много троек (a, b, c) попарно различных натуральных чисел, таких что каждое из чисел $ab+n$, $bc+n$ и $ac+n$ является полным квадратом.

6. В квадрате размера 10×10 необходимо покрасить несколько (не меньше одной) клеток так, чтобы, какой квадрат размера 3×3 ни выделить, в нём будет покрашено чётное количество клеток.

Какое наименьшее количество клеток необходимо покрасить?

7. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Точки K и M делят стороны AB и CD в равных отношениях $AK : KB = DM : MC$, а точки L и N делят стороны BC и DA в равных отношениях $BL : LC = AN : ND$. Описанная окружность треугольника CML повторно пересекает диагональ AC в точке P. Описанная окружность треугольника DNM повторно пересекает диагональ BD в точке Q. Описанные окружности треугольников AKN и BLK повторно пересекаются в точке R.

Докажите, что описанная окружность треугольника PQR проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD.

8. Даны два числа: $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ и $1+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}$. За один ход с ними можно проделать одну из следующих операций: заменить одно из чисел a на $a-\sqrt[3]{2}$ либо $-2a$; заменить оба записанных числа a и b числами $a-b$ и $a+b$ (числа a и b можно взять в любом порядке).

Докажите, что оба полученных в результате конечного количества ходов чи́сла всегда ненулевые.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов