Решения задач. 11 класс.

Задание 1. Легкая разминка

Задача 1.1

1.1.1 Внутренняя энергия газа рассчитывается по формуле:

$$U = C_V \nu RT\ . \tag{1}$$

Запишем также уравнение состояния газа

$$PV = \nu RT\,. \tag{2}$$

Из этих уравнений следует, что

$$U = C_V PV\ . \tag{3}$$

Внутренняя энергия воздуха в комнате не изменилась.

1.2.1 Тем не менее, на нагревание воздуха теплота необходима. Изменение внутренней энергии оказалась равным нулю, потому, что часть воздуха вышла наружу. Сложность расчета полного количества теплоты заключается в том, что в процессе разные порции воздуха выходили при разных температурах, получая разное количество теплоты.
Рассмотрим, как изменялось количество воздуха в комнате при изменении температуры. Для этого выразим из (2) зависимость количества вещества в комнате от температуры:

$$\nu = \frac{PV}{RT}\ . \tag{4}$$

Тогда при изменении температуры на малую величину dT число молей уменьшалось на

$$d\nu = \frac{PV}{R}\frac{dT}{T^2}\,. \tag{5}$$

Эта порция воздуха получила количество теплоты, равное

$$\delta Q = C_P(T - T_0)d\nu = C_P \frac{PV}{R}\frac{T - T_0}{T^2}dT\ . \tag{6}$$

Здесь $C_P = C_V + R = \frac{7}{2}R$ - молярная теплоемкость при постоянном объеме (процесс изобарный). Для точного расчета количества полученной теплоты необходимо проинтегрировать выражение (6). Однако, так как относительное изменение абсолютной температуры не велико, то в знаменателе этого выражения изменением температуры можно пренебречь. Тогда количество теплоты, унесенное на улицу можно представить в виде:

$$Q = \frac{C_P}{R}PV\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 = \frac{7}{4}PV\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 \approx 52\text{кДж}\,. \tag{7}$$

Модно заметить, что это выражение модно представить в наглядной форме (которую можно получить на основании качественных физических рассуждений)

$$Q = \frac{1}{2}C_P\Delta\nu\Delta T\ . \tag{8}$$

<u>Задача 1.2</u>

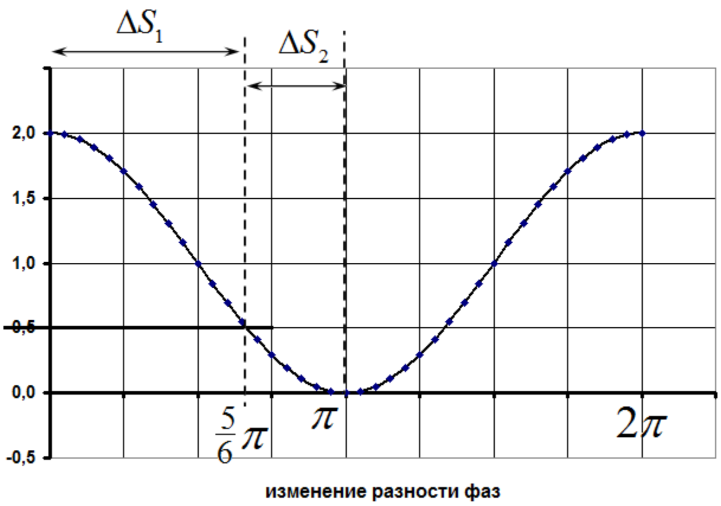
Причиной изменения интенсивности отраженного света является интерференция волн, отраженных от передней и задней поверхностей пленки. При интерференции двух волн одинаковой интенсивности интенсивность результирующей волны описывается формулой

$$I = I_0(1+\cos\varphi)\,, \tag{1}$$

Где φ разность фаз между интерферирующими волнами. Разность фаз между указанными волнами пропорциональна толщине пленки, или обратно пропорциональна ее площади. При малом изменении площади, толщина пленки также будет изменяться мало, тогда это изменение толщины можно выразить следующим образом

$$h = \frac{h_0 S_0}{S_0 + \Delta S} \approx h_0\left(1 - \frac{\Delta S}{S_0}\right) \tag{2}$$

Таким образом, можно считать, что изменение толщины пленки, а, следовательно, и разности фаз между двумя волнами пропорционально изменению ее площади. Так как при начальной площади S_0 интенсивность достигла максимума, то при этой площади разность фаз составляла целое число 2π, поэтому можно положить, в этот момент разность фаз равнялась нулю. Для наглядности изобразим график интенсивности отраженного света от разности фаз. Итак, при $\Delta S = 0$ разность фаз также равнялась нулю, а интенсивность достигла максимального значения в 2 условных единицы. Далее интенсивность монотонно убывала – следовательно, все изменения проходят в пределах одного порядка интерференции. Затем интенсивность уменьшилась в 4 раза, следовательно, она стала равной 0,5. Глядя на формулу (1), не сложно заметить, что в этот момент косинус сдвига фаз стал равным -0,5, что соответствует разности фаз в $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$. Для того, чтобы интенсивность стала равной нулю, необходимо чтобы разность фаз стала равной π. То есть фаза должна дополнительно изменится на $\frac{1}{6}\pi$. При изменении площади на величину ΔS_2, фаза должна измениться в 5 раз меньше, чем при изменении площади на величину ΔS_1. А так как изменение разности фаз и изменение площади пропорциональны друг другу, то изменение площади должно быть в 5 раз меньше, т.е.



$$\Delta S_2 = \frac{1}{5}\Delta S_1\ . \tag{3}$$

<u>Задача 1.3</u>

Запишем уравнения закона сохранения импульса

$$\frac{h}{\lambda_0} = -\frac{h}{\lambda} + p \qquad (1)$$

И закона сохранения энергии

$$\frac{hc}{\lambda_0} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda} + E \qquad (2)$$

Здесь p, E - импульс и энергия электрона после взаимодействия. Добавим уравнение связи между энергией и импульсом электрона

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad (3)$$

При аккуратном (и не слишком громоздком) решении полученной системы уравнений (1) -(3). получаем известный результат для сдвига длины волны:

$$\Delta\lambda = 2\frac{h}{mc} = 4{,}8 \cdot 10^{-12}\,м\,. \qquad (4)$$

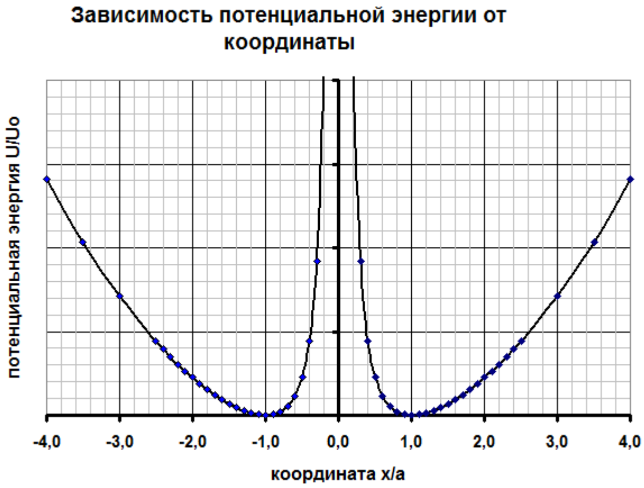
Задача 2. Негармонические колебания.

1.1 Для построения схематического графика потенциальной функции (зависимости потенциальной энергии от координаты)

$$U(x) = ka^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} - 2\right) \quad (1)$$

Следует отметить ее очевидные свойства:
- функция является четной, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат;
- функция обращается в ноль при $x = a$;
- при $x \to 0$ потенциальная энергия стремится к бесконечности, т.е. в нуле существует бесконечный потенциальный барьер;
- при $x \to \infty$ функция приближается к квадратичной зависимости, ее график приближается к параболе.

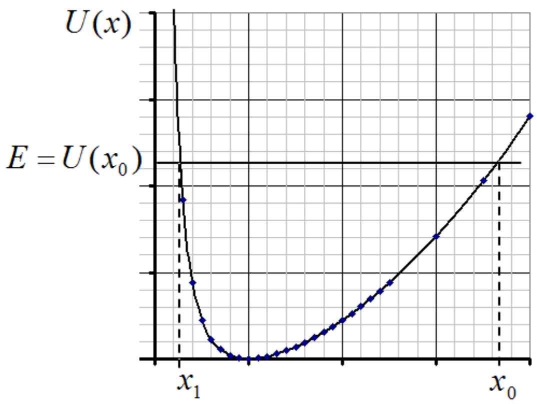
Этих свойств вполне достаточно, что бы построить схематический график зависимости $U(x)$, который показан на рисунке.



1.2 Потенциальная кривая имеет точку минимума, что соответствует наличию положения устойчивого равновесия. Поэтому точка будет совершать колебательное движение. Так как зависимость потенциальной энергии от координаты не является квадратичной. То колебания не будут гармоническими.

1.3 Как было отмечено вблизи $x = 0$ потенциальная энергия стремиться к бесконечности, поэтому материальная точка не сможет преодолеть этот барьер. Поэтому в дальнейшем достаточно рассматривать только область $x > 0$. Для качественного анализа характера движения можно воспользоваться уравнением закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = U(x_0) \quad (2)$$



В котором полная энергия точки определяется начальным условием $E = U(x_0)$. Точки возврата, в которых скорость обращается в нуль задаются уравнением:

$$U(x) = U(x_0) \quad (3)$$

Это уравнение иллюстрируется рисунком, на котором отмечен уровень полной энергии и точки x_0, x_1, в пределах которых происходит движение точки. Для определения пределов движения необходимо решить уравнение (причем надо выбирать только положительные корни)

$$ka^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-2\right)=ka^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{a^2}{x_0^2}-2\right) \qquad (4)$$

Можно решить это уравнение стандартными методами (оно сводится к биквадратному уравнению). Но проще заметить, что уравнение симметрично относительно замены $\frac{x}{a}\to\frac{a}{x}$.

Поэтому второй положительный корень этого уравнения $x_1=\frac{a}{x_0}$.

Таким образом, материальная точка будет двигаться внутри интервала

$$x\in\left[x_0,\frac{a}{x_0}\right]. \qquad (5)$$

1.4 Малые колебания точки происходят вблизи положения равновесия $x=a$. Поэтому представим координату точки в виде

$$x=(a+y) \qquad (6)$$

Где отклонение от положения равновесия $y<<a$. Для упрощения потенциальной функции преобразуем ее к виду

$$U(x)=ka^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-2\right)=ka^2\left(\frac{(a+y)^2}{a^2}+\frac{a^2}{(a+y)^2}-2\right)=$$

$$=ka^2\frac{(a+y)^4+a^4-2(a+y)^2a^2}{(a+y)^2a^2}=ka^2\frac{\left((a+y)^2-a^2\right)^2}{(a+y)^2a^2}=ka^2\frac{\left(2ay+y^2\right)^2}{(a+y)^2a^2}$$

Теперь следует пренебречь всеми слагаемыми, имеющими больший порядок, чем y^2:

$$U(x)=ka^2\frac{\left(2ay+y^2\right)^2}{(a+y)^2a^2}\approx ka^2\frac{(2ay)^2}{(a)^2a^2}=4ky^2. \qquad (7)$$

В этом приближении уравнение закона сохранения энергии приобретает вид

$$\frac{mv^2}{2}+4ky^2=4ky_0^2, \qquad (8)$$

которое является уравнением гармонических колебаний с круговой частотой $\omega^2=\frac{8k}{m}$.

Следовательно, период малых колебаний определяется по формуле

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{8k}}=\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}. \qquad (9)$$

1.5 При больших амплитудах колебаний можно приближенно считать, что

$$U(x) = kx^2 \qquad (10)$$

При $x > 0$ и обращается в бесконечность при $x = 0$. График этой приближенной функции показан на рисунке. Движение в этом случае можно представить как гармонические колебания при $x > 0$ и абсолютно упругое отражение в начале координат. Поэтому период таких колебаний будет равен половине периода гармонических колебаний с потенциальной энергией, описываемой функцией (10):

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}} = \pi \sqrt{\frac{m}{2k}}\,. \qquad (11)$$

Этот период совпадает с периодом малых колебаний.

1.6 Воспользуемся «подсказкой» и получим уравнение для квадрата координаты частицы $z = x^2$. Скорость изменения этой величины равна

$$V_z = (z)' = 2xx' = 2xv \qquad (12)$$

Тогда скорость частицы равна:

$$v = \frac{V_z}{2x}\,. \qquad (13)$$

Выразим потенциальную энергию через параметр z:

$$U(x) = ka^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} - 2\right) = ka^2\left(\frac{z}{a^2} + \frac{a^2}{z} - 2\right). \qquad (14)$$

Подставим эти выражение в уравнения закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = U(x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}\left(\frac{V_z}{2x}\right)^2 + k\frac{(z-a^2)^2}{z} = k\frac{(z_0 - a^2)^2}{z_0}\,. \qquad (15)$$

Учитывая, что $x^2 = z$, получим

$$\frac{m}{2}V_z^2 + 4k(z-a^2)^2 = 4k\frac{(z_0-a^2)^2}{z_0}z \qquad (16)$$

В этом уравнении можно выделить полный квадрат относительно переменной z и привести его к виду

$$\frac{m}{2}V_z^2 + 4k(z-b)^2 = E\,. \qquad (17)$$

А это уравнение также является уравнением гармонических колебаний, для которых период не зависит от амплитуды. Следовательно, переменная z (поэтому и $x = \sqrt{z}$) изменяется периодически, с постоянным периодом, не зависящим от амплитуды колебаний.

1.7 Для того, чтобы получить зависимость координаты от времени, необходимо провести преобразования, анонсированные в предыдущем пункте задачи. Однако, можно пойти и более простым логическим путем:

- переменная z изменяется по гармоническому закону, поэтому отклонения от средней точки в обе стороны должны быть одинаковы;

- координата x изменяется в пределах $\left[x_0, \dfrac{a^2}{x_0}\right]$, поэтому переменная $z = x^2$ лежит в интервале $\left[x_0^2, \dfrac{a^4}{x_0^2}\right]$;

- средняя точка для переменной z имеет значение $\bar{z} = \dfrac{1}{2}\left(x_0^2 + \dfrac{a^4}{x_0^2}\right)$;

- амплитуда изменения переменной z равна $A = x_0^2 - \bar{z} = \dfrac{1}{2}\left(x_0^2 - \dfrac{a^4}{x_0^2}\right)$.

Поэтому закон изменения переменной z должен иметь вид (период колебаний задается формулой (9)):

$$z = \bar{z} + A\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(x_0^2 + \frac{a^4}{x_0^2}\right) + \frac{1}{2}\left(x_0^2 - \frac{a^4}{x_0^2}\right)\cos\omega t. \tag{18}$$

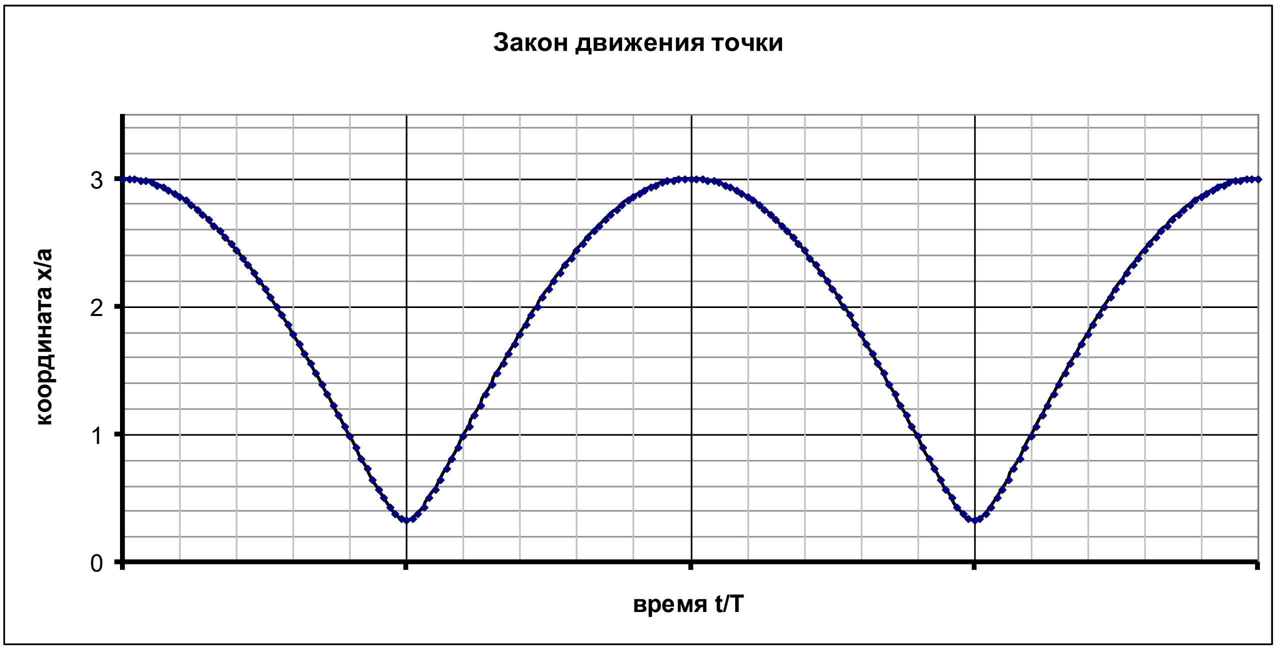
Наконец, возвращаясь к координате точки. Получим закон ее изменения:

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x_0^2 + \frac{a^4}{x_0^2}\right) + \frac{1}{2}\left(x_0^2 - \frac{a^4}{x_0^2}\right)\cos\omega t} \tag{19}$$

Подставляя заданное начальное значение $x_0 = 3a$, получим

$$x(t) = \frac{a}{3}\sqrt{41 + 40\cos\omega t} \tag{20}$$

График этой функции показан на рисунке.



Задача 3. Эффект Эйнштейна-де-Гааза

1. В полном соответствии с теоретическим введением момент импульса электрона, вращающегося по круговой орбите вокруг ядра атома, определяется соотношением:

$$L = m_e v r \tag{1}$$

2. Электрон, движущийся по круговой орбите, аналогичен круговому току, сила которого может быть записана в виде:

$$i = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} \tag{2}$$

Тогда магнитный момент такого кругового тока:

$$p_m = i\pi r^2 = \frac{evr}{2} \tag{3}$$

Не стоит забывать о том, что момент импульса и магнитный момент, - это векторные величины. Вследствие того, что электрон – отрицательно заряженная частица, а за направление тока принято направление движения положительно заряженных частиц, соответствующие моменты направлены в разные стороны.

3. Выразим гиромагнитное отношение с использованием (1) и (3), с учетом направления векторов:

$$\overrightarrow{p_m} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L} \tag{4}$$

$$g = \frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m_e} = 8,78\cdot 10^{10}\ \frac{Кл}{кг} \tag{5}$$

4. Рассмотрим момент импульса всех электронов, отвечающих за магнитные свойства цилиндра. Используя гиромагнитное отношение, свяжем значение суммарного момента импульса электронов с магнитными моментами каждого из них:

$$\overrightarrow{L_e} = -\frac{2m_e}{e}\sum_{(i)}\overrightarrow{p_{mi}} \tag{6}$$

Изменение момента импульса электронов при изменении магнитных моментов:

$$\overrightarrow{\Delta L_e} = -\frac{2m_e}{e}\sum_{(i)}\overrightarrow{\Delta p_{mi}} \tag{7}$$

Поскольку суммарный момент импульса цилиндра не изменяется, можно записать:

$$\overrightarrow{\Delta L_e} + \overrightarrow{\Delta L_{цил}} = 0 \longrightarrow \overrightarrow{\Delta L_{цил}} = -\overrightarrow{\Delta L_e} \tag{8}$$

И по итогу:

$$\overrightarrow{\Delta L_{цил}} = \frac{2m_e}{e}\sum_{(i)}\overrightarrow{\Delta p_{mi}} \tag{9}$$

5. При изменении направления магнитного поля на противоположные магнитные моменты электронов, вращающихся на круговых орбитах, переворачиваются:

$$\overrightarrow{\Delta p_m} = -2\overrightarrow{p_m} \tag{10}$$

Тогда в соответствии с (9) получаем:

$$\overrightarrow{\Delta L_{цил}} = \frac{2m_e}{e}(-2\overrightarrow{p_m})N\ , \tag{11}$$

Где N – количество электронов, отвечающих за магнитные свойства образца. Поскольку количество таких электронов совпадает с числом атомов, получаем:

$$N = \frac{m}{M}N_A \tag{12}$$

И в итоге:

$$\overrightarrow{\Delta L_{цил}} = -\frac{4m_e}{e}\frac{m}{M}N_A\overrightarrow{p_m} \tag{13}$$

Исходя из изменения момента импульса цилиндра найдем конечную угловую скорость вращения:

$$\Delta L_{цил} = I\Delta\omega = \frac{4m_e}{e}\frac{m}{M}N_A p_m \tag{14}$$

Откуда с учетом выражения для момента инерции цилиндра получаем:

$$\omega = \frac{8m_e}{eMr^2}N_A p_m \tag{15}$$

6. Вывод уравнения крутильных колебаний цилиндра:

Изменение момента импульса:

$$\frac{dL}{dt} = I\alpha''(t) \tag{16}$$

Оно связано с действием следующих вращающих моментов:

А) Возвращающий момент

$$M_1 = -I\omega_0^2\alpha(t)\,, \tag{17}$$

отвечающий за собственные крутильные колебания с циклической частотой ω_0;

Б) Момент сил вязкого трения, описанный в условии задачи:

$$M_2 = -k\alpha'(t)\,, \tag{18}$$

где $\alpha'(t)$ - угловая скорость вращения цилиндра;

В) Механический момент, связанный с перемагничиванием цилиндра во внешнем переменном магнитном поле, любезно предоставленный авторами задачи:

$$M_3 = \frac{4P_m}{\pi g}\omega\cos\omega t \tag{19}$$

Уравнение динамики вращательного движения цилиндра тогда:

$$\frac{dL}{dt} = M_1 + M_2 + M_3 \tag{20}$$

Уравнение крутильных колебаний цилиндра во внешнем переменном магнитном поле с учетом всех приближений, описанных в условии задачи выглядит следующим образом:

$$I\alpha''(t) = -I\omega_0^2\alpha(t) - k\alpha'(t) + \frac{4P_m}{\pi g}\omega\cos\omega t \tag{20}$$

7. Подставим в уравнение (20) функцию, описанную в условии задачи: $\alpha(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Для подстановки выразим производные от данной функции по времени:

$$\alpha'(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi) \tag{21}$$

$$\alpha''(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) \tag{22}$$

Подставляя (21), (22) в (20), и учитывая, что частота колебаний внешнего переменного магнитного поля равна собственной частоте колебаний системы $\omega = \omega_0$, получаем:

$$\alpha(t) = \frac{4P_m}{\pi g k}\sin(\omega t)\text{, т.е. } A = \frac{4P_m}{\pi g k}, \varphi = 0 \qquad (23).$$

8. Выразим тогда гиромагнитное отношение:

$$g = \frac{4P_m}{\pi|\alpha_{\max}|k} = 8,7\cdot 10^{10} \tag{24}$$

9. Отличие измеренного значения гиромагнитного отношения от предсказываемого теорией объясняется наличием собственного магнитного момента электрона и ядра атома – спина.