Вариант 1

Решения заданий теоретического тура

Задание 1. Характеристики орбиты (20 баллов)

Решение

1) Для определения диапазона изменения расстояния от небесного тела до Солнца помимо эксцентриситета e необходимо знать длину большой полуоси эллипса орбиты a, которую можно определить, используя зависимость расстояния от истинной аномалии

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

поэтому при θ = 90° получим

$$a = \frac{r}{1-e^2} = 2{,}77 \text{ а.е.}$$

Если не использовать известную зависимость $r(\theta)$, то в данном случае a можно получить, исходя из несложных геометрических соображений, введя полуфокальное расстояние c

$$r^2 + 4c^2 = (2a - r)^2.$$

Значение длины большой полуоси оказывается таким же.

Теперь найдем перегелийное q и афелийное Q расстояния, тем самым определяя диапазон изменения r:

$$q = a\cdot(1 - e) = 2{,}55 \text{ а.е.}, \qquad Q = a\cdot(1 + e) = 2{,}99 \text{ а.е.}$$

2) Для определения диапазона изменения модуля линейной скорости V вначале найдем период обращения T, круговую скорость $V_{КР}$, а затем перигелийную $V_П$ и афелийную $V_А$ скорости:

$$T = a^{3/2} = 4{,}61 \text{ года}, \qquad V_{КР} = 2\pi a/T = 17{,}89 \text{ км/с},$$

$$V_П = V_{КР}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 19{,}38 \text{ км/с}, \qquad V_А = V_{КР}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = 16{,}51 \text{ км/с}.$$

3) Чтобы найти искомый промежуток времени Δt, необходимо знать площадь ΔS эллиптического сектора, описанную радиус-вектором тела в указанном случае, и его секторную (или *секторальную*) скорость v, которая остается постоянной согласно второму закону Кеплера. Они определяется из геометрических соображений (b – малая полуось):

$$\Delta S = \frac{\pi ab}{4} + \frac{bc}{2} = a^2\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{e}{2}\right); \qquad v = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}.$$

Тогда промежуток времени

$$\Delta t = \Delta S/v = \left(\frac{1}{4} + \frac{e}{2\pi}\right)\cdot T = 1{,}21 \text{ года} = 442{,}40 \text{ суток}.$$

4) Длина пройденного телом пути L равна четверти длины эллипса орбиты, поэтому:
$L = \pi(a + b)/4 = \pi a(1 + \sqrt{1-e^2})/4 = 4{,}34$ а. е. $\approx 65\cdot10^7$ км.

5) Небесное тело с такими характеристиками орбитального движения и указанной массой – это карликовая планета Церера из пояса астероидов.

Ответы:

1) $r \in [2{,}55$ а. е.; $2{,}99$ а. е.$]$ (6 баллов);
2) $V \in [16{,}51$ км/с; $19{,}38$ км/с$]$ (4 балла);
3) $\Delta t = 1{,}21$ года $= 442{,}40$ суток (7 баллов);
4) $L = 4{,}34$ а. е. $\approx 65\cdot10^7$ км (2 балла);
5) Карликовая планета из пояса астероидов Церера (1 балл).

Задание 2. Планета и астероид (20 баллов)

Решение

1) Для вывода формулы синодического периода нижней планеты $S_З$ надо понимать, что относительная угловая скорость при противоположном направлении обращения вокруг звезды равна сумме угловых скоростей планеты и астероида

$$\omega_{отн} = \omega_з + \omega_ф; \quad \rightarrow \quad \frac{2\pi}{S_З} = \frac{2\pi}{T_З} + \frac{2\pi}{T_Ф}; \quad \rightarrow \quad \frac{1}{S_З} = \frac{1}{T_З} + \frac{1}{T_Ф}; \quad \rightarrow \quad S_З = \frac{T_З T_Ф}{T_З + T_Ф}.$$

2) В случае $S_Ф$ работает та же сумма угловых скоростей, поэтому и формула получается та же

$$S_Ф = \frac{T_З T_Ф}{T_З + T_Ф}.$$

То есть в рассматриваемой ситуации синодические периоды верхних и нижних объектов рассчитываются по одной формуле и будут одинаковыми!!!

3) Рассчитаем синодические периоды в земных годах, используя 3-й закон Кеплера и полученную формулу:

$$r^3 \equiv a^3 = \pi T^2; \quad \rightarrow \quad T_З = \pi \text{ лет}; \quad T_Ф = 2\sqrt{2}\pi \text{ лет}; \quad \rightarrow \quad S_З = S_Ф = \frac{8-2\sqrt{2}}{7}\pi \text{ лет} = 2{,}320 \text{ года}.$$

4) Рассчитаем синодические периоды в «зелёных» годах, используя 3-й закон Кеплера и полученную формулу, считая, что 1 зел.а.е. = π а.е.:

$$r^3 \equiv a^3 = T^2; \quad \rightarrow \quad T_З = 1 \text{ зел. год}; \quad T_Ф = 2\sqrt{2} \text{ зел. лет}; \quad \rightarrow$$

$$S_З = S_Ф = \frac{8-2\sqrt{2}}{7} \text{ зел. лет} = 0{,}739 \text{ зел. года}.$$

5) Рассчитаем синодические периоды в «фиолетовых» годах, используя 3-й закон Кеплера и полученную формулу, считая, что 1 фиол. а.е. = 2π а.е.:

$$r^3 \equiv a^3 = T^2; \quad \rightarrow \quad T_З = 0{,}354 \text{ фиол. года}; \quad T_Ф = 1 \text{ фиол. год}; \quad \rightarrow \quad S_З = S_Ф = 0{,}261 \text{ фиол. года}.$$

Ответы:

1) и 2) $S_З = S_Ф = \frac{T_З T_Ф}{T_З + T_Ф}$ (5 баллов, 2 балла);

3) $S_З = S_Ф = \frac{8-2\sqrt{2}}{7}\pi$ лет = 2,320 года (5 баллов);

4) $S_З = S_Ф = \frac{8-2\sqrt{2}}{7}$ зел. лет = 0,739 зел. года (4 балла);

5) $S_З = S_Ф$ = 0,261 фиол. года (4 балла).

Задание 3. Космические лучи (20 баллов).

Решение

1) В системе СИ полная энергия α-частицы E = 4 Гэв = 6,408·10^{-10}Дж. Найдем релятивистскую массу m и её отношение к массе покоя m_0:

$$m = E/c^2 = 7{,}120\cdot10^{-27}\text{кг}; \qquad m/m_0 = 1{,}071.$$

2) Рассчитаем скорость V и импульс P:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad \rightarrow \quad V = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = 0{,}358c = 1{,}074\cdot10^8\text{м/с};$$

$$P = mV = 7{,}648\cdot10^{-19}\ \text{кг·м/с};$$

3) Определим кинетическую энергию α-частицы:

$$E_к = E - m_0c^2 = 0{,}428\cdot10^{-10}\text{Дж} = 0{,}267\ \text{ГэВ}.$$

4) Корпускулярно-волновой дуализм говорит о том, что частицы материи обладают волновыми свойствами. Соответствующая длина волны называется длиной волны де Бройля, которая рассчитывается по формуле:

$$\lambda_{дБ} = h/P = 8{,}664\cdot10^{-16}\ \text{м};$$

5) Реакция аннигиляции в данном случае имеет вид: $\alpha + \tilde{\alpha} \rightarrow 2\gamma$. При оговоренных условиях частица и её античастица рождают два одинаковых гамма-кванта, поэтому:

$$E = h\nu = hc/\lambda; \quad \rightarrow \quad \nu = E/h = 9{,}671\cdot10^{23}\ \text{Гц}; \quad \lambda = c/\nu = 3{,}102\cdot10^{-16}\ \text{м}.$$

Ответы:

1) $m = E/c^2 = 7{,}130\cdot10^{-27}$кг и $m/m_0 = 1{,}073$ (3 балла и 1 балл);
2) $V = 1{,}087\cdot10^8$м/с и $P = mV = 7{,}750\cdot10^{-19}$ кг·м/с (4 балла, 1 балл);
3) $E_к = 0{,}435\cdot10^{-10}$Дж = 0,272 ГэВ (3 балла);
4) $\lambda_{дБ} = h/P = 8{,}550\cdot10^{-16}$ м (4 балла);
5) $\nu = E/h = 9{,}671\cdot10^{23}$ Гц; $\lambda = c/\nu = 3{,}100\cdot10^{-16}$ м (2 балла и 2 балла).

Задание 4. Реликтовое излучение (20 баллов).

Решение

1), 2) и 3) Температура РИ и λ_{max} связаны законом смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

откуда в современную эпоху $T = 2{,}726$ К, а в момент «отделения» излучения от вещества $\lambda_{max} \approx 1000$ нм, т.е. максимум спектра находился в ИК диапазоне.

4) Положение максимума в спектре излучения АЧТ определяется его температурой, поэтому расчёт с использованием формулы $\nu = c/\lambda$ приведёт к неверному результату (282 ГГц).

Закон Планка в шкале длин волн выглядит следующим образом:

$$\rho_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}, \qquad (1)$$

а в шкале частот:

$$\rho_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}. \qquad (2)$$

Распределения (1) и (2) связаны условием

$$\rho_\lambda(\lambda, T)d\lambda = \rho_\nu(\nu, T)d\nu.$$

Максимум интенсивности в спектре может быть найден при нахождении экстремума функции (2):

$$\frac{d\rho_\nu}{d\nu} = 0,$$

откуда следует условие:

$$\frac{h\nu e^{\frac{h\nu}{kT}}}{kT}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} = 3. \qquad (3)$$

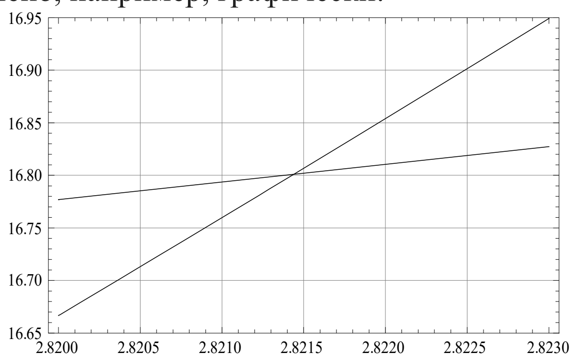
Если ввести замену $\frac{h\nu}{kT} = x$, то условие (3) принимает вид:

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = 3,$$

из которого можно получить уравнение:

$$e^x = \frac{3}{3-x},$$

которое может быть решено, например, графически:



$$x = 2{,}8214.$$

Тогда $\nu_{\max} = \frac{xkT}{h} = 160{,}3$ ГГц.

Ответы:

1) $T = 2{,}726$ К (3 балла);
2) $\lambda_{max} \approx 1000$ нм (3 балла);
3) ИК диапазон (2 балла);
4) $\nu_{\max} = 2{,}821\frac{kT}{h} = 160{,}3$ ГГц (12 баллов).

Задание 5. Пульсар (20 баллов).

Решение.

1) Средний радиус нейтронной звезды R_N = 15 км. Тогда средняя плотность

$$\rho_\mathrm{N} = \frac{\mathfrak{M}_\mathrm{N}}{V_\mathrm{N}} = \frac{3\mathfrak{M}_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\mathrm{N}^3} = \frac{9\mathfrak{M}_\odot}{4\pi R_\mathrm{N}^3} = 4{,}2 \times 10^{17}\ \text{кг/м}^3.$$

2) Закон сохранения момента импульса для ядра звезды до сжатия в нейтронную звезду и после:

$$I\omega = I_\mathrm{N}\omega_\mathrm{N}, \qquad (1)$$

где I, I_N, ω и ω_N – моменты инерции и угловые скорости ядра до сжатия и после.

Момент импульса ядра звезды $J = I\omega$ до сжатия в нейтронную звезду составляет x = 0,0001 от исходного момента импульса звезды

$$J = xJ_\mathrm{B} = xI_\mathrm{B}\omega_\mathrm{B}, \qquad (2)$$

где I_B и ω_B – момент инерции и угловая скорость звезды до сброса оболочки.

Угловая скорость $\omega_\mathrm{B} = \frac{v_\mathrm{B}}{R_\mathrm{B}} = \frac{v_\mathrm{B}}{4R_\odot}$. Момент инерции шара пропорционален его массе и радиусу:

$$I = \frac{2}{5}mr^2.$$

Тогда из (1) и (2) следует, что

$$x\mathfrak{M}_\mathrm{B}R_\mathrm{B}^2\frac{v_\mathrm{B}}{R_\mathrm{B}} = \mathfrak{M}_\mathrm{N}R_\mathrm{N}^2\omega_\mathrm{N}.$$

Тогда

$$\omega_\mathrm{N} = x\frac{\mathfrak{M}_\mathrm{B}}{\mathfrak{M}_\mathrm{N}}\frac{R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{N}^2}v_\mathrm{B} = x\frac{5\mathfrak{M}_\odot}{3\mathfrak{M}_\odot}\frac{4R_\odot}{R_\mathrm{N}^2}v_\mathrm{B} = 415\ \text{об/с},$$

а период вращения нейтронной звезды $T_\mathrm{N} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{N}} = 0{,}015$ с.

3) Индукцию магнитного поля вблизи магнитных полюсов нейтронной звезды B_N можно найти из закона сохранения магнитного потока:

$$BS_\mathrm{B} = B_\mathrm{N}S_\mathrm{N},$$

где S_B и S_N – площади поверхности звезды до сброса оболочки и нейтронной звезды, соответственно. Тогда

$$B_\mathrm{N} = B\left(\frac{4R_\odot}{R_\mathrm{N}}\right)^2 = 7{,}0 \times 10^6\ \text{Тл}.$$

4) и 5) Угловая скорость электрона в магнитном поле $\omega_c = \frac{v}{r}$ находится из второго закона Ньютона: $evB_\mathrm{N} = m\frac{v^2}{r}$, откуда $\omega_c = \frac{eB_\mathrm{N}}{m}$. Частота циклотронного излучения

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{eB_\mathrm{N}}{2\pi m},$$

частота синхротронного излучения:

$$\nu_s = \frac{eB_\mathrm{N}}{2\pi m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \qquad (3)$$

Энергии фотона 6 кэВ соответствует частота около 15×10^{17} Гц (рентгеновский диапазон). После преобразований из (3) получаем

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{eB_\mathrm{N}}{2\pi\nu_s m}\right)^2}} = 0{,}86.$$

Ответы:

1) $\rho_{\mathrm{N}} = \frac{9\mathfrak{M}_\odot}{4\pi R_{\mathrm{N}}^3} = 4{,}2 \times 10^{17}$ кг/м^3 (3 балла);

2) $T_{\mathrm{N}} = \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{N}}} = 0{,}015$ сек (5 баллов);

3) $B_{\mathrm{N}} = B\left(\frac{5R_\odot}{R_{\mathrm{N}}}\right)^2 = 7.0 \times 10^6$ Тл (5 баллов);

4) $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{eB_{\mathrm{N}}}{2\pi\nu_s m}\right)^2}} = 0{,}86$ (5 баллов);

5) рентгеновский пульсар (2 балла).