Республиканская физическая олимпиада 2023 год
(III этап)

Теоретический тур

Решения задач
10 класс
(для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты. Если окончательный результат не занесен в Листы ответов, но содержится в основном решении, то этот результат необходимо оценивать.

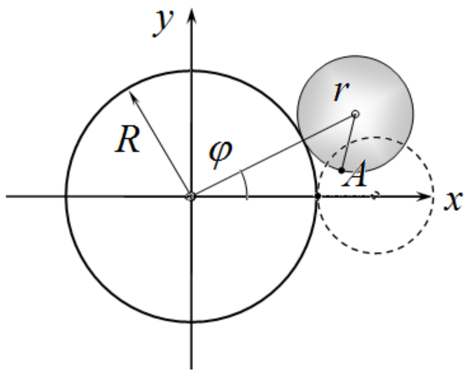
Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 10-1. Двойное вращение. Решение.

1. Относительно центра колеса точка A поворачивается на угол α, который можно найти из условия

$$R\varphi = r\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{R}{r}\varphi. \qquad (1)$$



Тогда, как следует из рисунка, координаты точки A (с учетом $\varphi = \omega t$) описываются функциями

$$\begin{aligned} x(t) &= (R+r)\cos\omega t - r\cos\left(\frac{R}{r}+1\right)\omega t \\ y(t) &= (R+r)\sin\omega t - r\sin\left(\frac{R}{r}+1\right)\omega t \end{aligned}. \qquad (2)$$

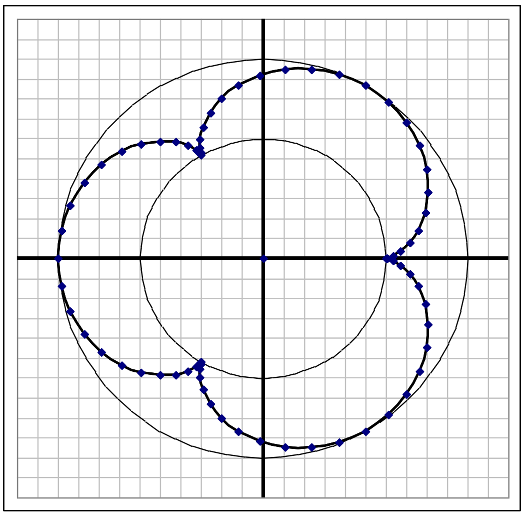
2.Скорость точки максимальна, когда она находится на максимальном удалении от центра диска. В эти моменты времени скорость центра $\omega(R+r)$ и скорость точки относительно центра колеса $\left(\frac{R}{r}+1\right)\omega r = (R+r)\omega$ совпадают, поэтому полная скорость точки A будет равна

$$v_{\max} = 2(R+r)\omega. \qquad (3)$$

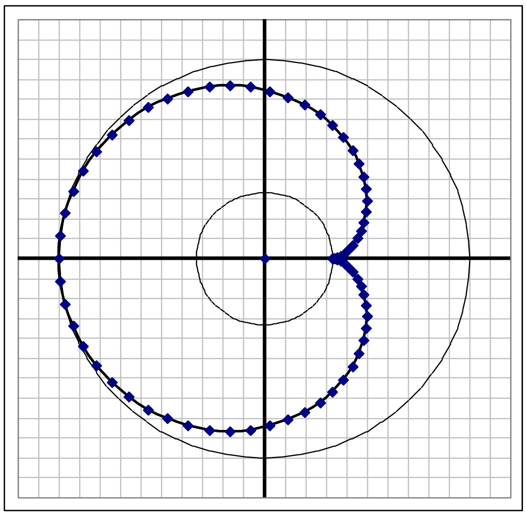
Этот же результат можно получить, рассматривая точку касания как мгновенный центр вращения.

3. Схематические траектории можно построить, если последовательно находить точки касания и точки максимального удаления от диска. Ниже показаны эти траектории.

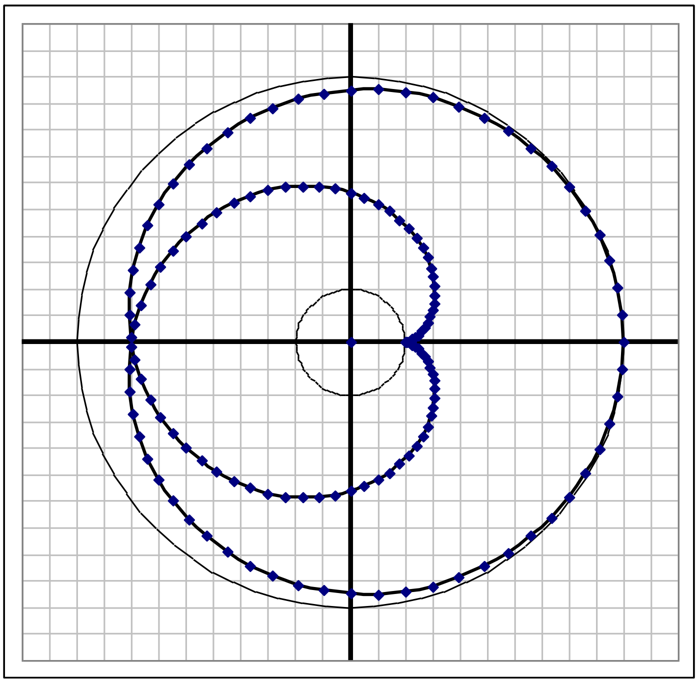
А) $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$



б) $\frac{r}{R} = 1$ (эта кривая называется кардиоида)



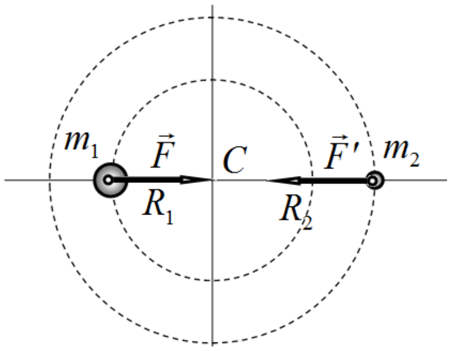
В) $\frac{r}{R} = 2$ Здесь колесо делает два оборота между последовательными касаниями.



Задание 10-2. Космический инфракрасный телескоп Джеймс Уэбб. Решение.

1. На основании 2 закона Ньютона и закона всемирного тяготения запишем уравнения, описывающие круговые движения обоих тел:

$$\begin{gathered} m_1\omega^2 R_1 = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \\ m_2\omega^2 R_2 = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \end{gathered}. \qquad (1)$$



Здесь ω - угловая скорость движения тел. Из этих уравнений следует, что радиусы орбит удовлетворяют условию

$$m_1 R_1 = m_2 R_2 . \qquad (2)$$

Это соотношение указывает, что центр окружностей является центром масс системы двух тел.

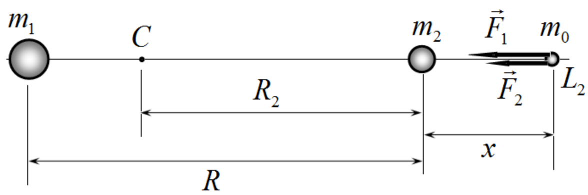
2. Сумма радиусов равна расстоянию между телами

$$R_1 + R_2 = R . \qquad (3)$$

Из уравнений (2) - (3) находим радиусы орбит:

$$\begin{gathered} R_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R \\ R_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R \end{gathered}. \qquad (4)$$

3. Для тела массы m_0, находящегося в точке Лагранжа, справедливо уравнение



$$m_0\omega^2 (R_2 + x) = G\frac{m_0 m_1}{(R + x)^2} + G\frac{m_0 m_2}{x^2} . \qquad (5)$$

Из уравнения (1) выразим значение угловой скорости

$$\omega^2 = G\frac{m_2}{R^2}\frac{1}{R_1} = G\frac{m_2}{R^2}\frac{m_1 + m_2}{m_2 R} = G\frac{m_1 + m_2}{R^3}$$

И подставим его в уравнение (5), также как выражение для R_2:

$$G\frac{m_1+m_2}{R^3}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}R+x\right)=G\frac{m_1}{(R+x)^2}+G\frac{m_2}{x^2} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{m_1+m_2}{R^3}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}R+x\right)=\frac{m_1}{(R+x)^2}+\frac{m_2}{x^2} \quad\Rightarrow \tag{6}$$

$$\frac{m_1}{R^2}+\frac{m_1+m_2}{R^3}x==\frac{m_1}{(R-x)^2}+\frac{m_2}{x^2}$$

Наконец, разделим уравнение на массу большего тела и введем отношение масс массивных тел $\mu=\frac{m_2}{m_1}$, в результате получим уравнение для расчета значения расстояния от второго тела до первой точки Лагранжа:

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1+\mu}{R^3}x==\frac{1}{(R+x)^2}+\frac{\mu}{x^2} \tag{7}$$

4. Очевидно, что масса спутника значительно меньше массы Земли, поэтому его положение совпадает с точкой Лагранжа. Поэтому для расчета расстояния до Земли следует решить уравнение (7). Точное решение этого уравнения затруднительно. Однако, масса Земли значительно меньше массы Солнца $\mu=3{,}0\cdot10^{-6}<<1$, поэтому расстояние до Земли значительно меньше радиуса Земной орбиты $x<<R$ (который практически равен расстоянию от центра Земли до центра Солнца). В этом случае можно решить данное уравнение приближенно (но с высокой точностью), для чего следует провести следующее разложение:

$$\frac{1}{(R+x)^2}\approx\frac{1}{R^2}-\frac{2}{R^3}x\,. \tag{8}$$

После этого разложения уравнение решается элементарно:

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1+\mu}{R^3}x==\frac{1}{(R+x)^2}+\frac{\mu}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{R^2}+\frac{1+\mu}{R^3}x=\frac{1}{R^2}-\frac{2}{R^3}x+\frac{\mu}{x^2} \quad\Rightarrow$$

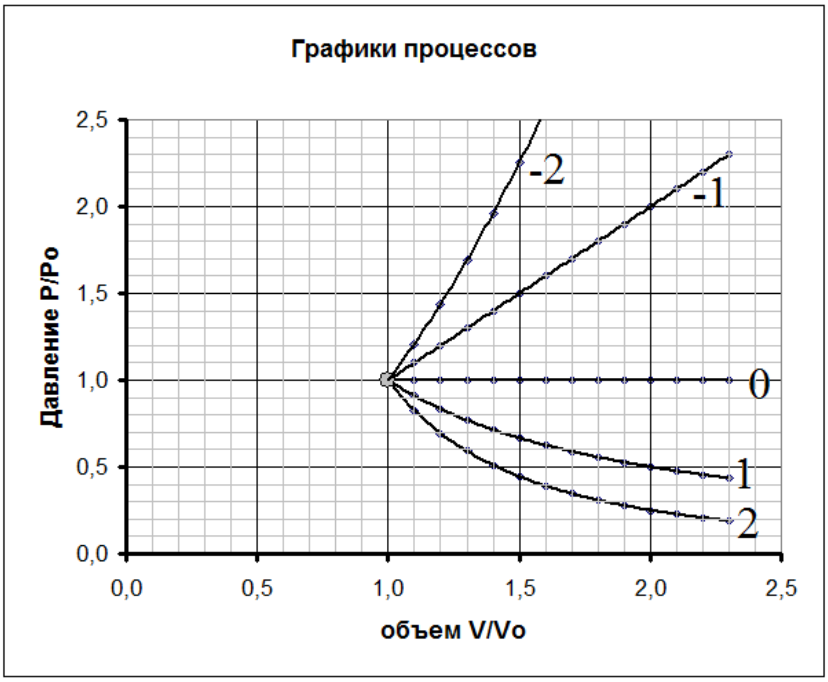
$$\frac{3+\mu}{R^3}x=\frac{\mu}{x^2} \quad\Rightarrow\quad x=\sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}R \tag{9}$$

Численный результат:

$$x=\sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}R=1{,}5\cdot10^6\,км\,. \tag{10}$$

Задание 10-3. Теплоемкость газа. Решение.

1. Графики процессов показаны на рисунке. Числа возле кривых указывают значение параметра n. При $n \to \infty$ график стремиться к вертикальной прямой (изохорный процесс).



2. Для расчета теплоемкости газа запишем уравнение первого закона термодинамики

$$\delta Q = \Delta U + \delta A \tag{1}$$

Воспользуемся определением теплоемкости и запишем

$$c = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\delta A}{\Delta T} = \frac{3}{2}R + P\frac{\Delta V}{\Delta T} \tag{2}$$

Для вычисления второго слагаемого воспользуемся уравнением состояния идеального газа

$$PV = RT \tag{3}$$

Из которого следует, что

$$R\Delta T = (P + \Delta P)(V + \Delta V) - PV \approx P\Delta V + V\Delta P\,. \tag{4}$$

С благодарностью используем подсказку

$$\frac{\Delta P}{P} = -n\frac{\Delta V}{V} \quad \Rightarrow \quad \Delta P = -n\frac{P}{V}\Delta V$$

Подставим в выражение (4)

$$R\Delta T = P\Delta V + V\Delta P = P\Delta V - Vn\frac{P}{V}\Delta V = (1-n)P\Delta V\,. \tag{5}$$

Наконец, подставим это выражение в формулу (2), в результате получаем окончательную формулу для теплоемкости

$$c = \frac{3}{2}R + P\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{3}{2}R - \frac{R}{n-1} = \frac{3n-5}{2(n-1)}R \tag{6}$$

Так как теплоемкость не зависит от характеристик состояния газа, то она постоянна в данном процессе.

3. Теплоемкость равна нулю при $n = \frac{5}{3}$. Такой процесс происходит без теплообмена, называется адиабатным.

4. Теплоемкость отрицательна, если показатель степени лежит в интервале

$$1 < n < \frac{5}{3}. \qquad (7)$$

В таких процессах газ совершает работу, большую, чем количество полученной теплоты. Эта работа совершается за счет внутренней энергии, поэтому температура газа понижается.

5. Теплоемкость стремится к бесконечности при $n = 1$. Этот процесс изотермический – газ теплоту получает, а его температура не растет.