Вариант 2
Задания теоретического тура

Задание 1. Небесная сфера. (20 баллов)

Некоторая звезда, эклиптические координаты которой $\lambda = 71°26'$, $\beta = -22°20'$ наблюдается в некоторой точке поверхности Земли, в момент времени, когда ее высота $h = 12°37'$, а азимут $A = 12°34'$.

а) Каковы географические координаты места наблюдения, если оно проводилось в $T_0 = 4^ч 56^{мин}$ всемирного времени, а звездное время средней полночи в эти сутки на гринвичском меридиане равно $S_0 = 6^ч 57^{мин}$?

б) Через сколько минут после наблюдения произойдет верхняя кульминация этой звезды?

в) Чему равен часовой угол этой звезды в момент ее захода.

г) Является ли данная звезда в месте наблюдения околополярной?

Подсказка: рефракцию не учитывать.

Решение:

а). Запишем преобразования эклиптических координат в экваториальные:

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda$$
$$\cos\delta\sin\alpha = -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda \;\Rightarrow\; \alpha = 4^ч{}°51^м,\;\; \delta = 0°0'.$$
$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\lambda\cos\beta$$

Запишем преобразования экваториальных координат в горизонтальные:

$$\cos z = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t$$
$$\sin z\cos A = -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t \;\Rightarrow\; \varphi = 77°05',\; t = 0^ч 49^м.$$
$$\sin z\sin A = \cos\delta\sin t$$

Используем формулу Ньютона:

$$T_0 = \left(s - S_0 + \frac{3^м 56^с}{24^ч}\lambda\right)\frac{365{,}2422}{366{,}2422} - \lambda \;\Rightarrow\; \lambda = -93°19'.$$

б) Время до верхней кульминации звезды найдем по формуле:

$$\Delta t = \left(24^ч - t\right)\frac{365{,}2422}{366{,}2422} = 1387^м.$$

в) Часовой угол звезды в момент ее захода найдем по формуле:

$$t_Z = a\cos(-\tan\delta\tan\varphi) = 6^ч 00^м 0^с.$$

г) Найдем зенитное расстояние звезды в нижней кульминации:

$$z_N = 180° - \left(\delta + \varphi\right) = 102°55'.$$

Ответ: а) $\varphi = 77°05'$, $\lambda = -93°19'$; б) $\Delta t = 1387^м$; в) $t_Z = 6^ч 00^м 03^с$; г) $z_N = 102°55'$ «НЕТ».

Задание 2. Полет на Луну. (20 баллов)

Космический аппарат земного происхождения входит в сферу действия Луны ($r_{C\Phi} = a_L\left(\frac{M_L}{M_Z}\right)^{\frac{2}{5}}$). Геоцентрическая скорость v аппарата в этот момент равна $160\frac{м}{с}$ и сонаправлена с вектором орбитальной скорости Луны, а прицельный параметр $b_0 = 10R_L$.

а) Вычислите большую полуось орбиты (в R_L), которую будет иметь космический аппарат в сфере действия Луны.

б) Определите скорость v_q в перицентре этой орбиты.

в) Каким должно быть значение прицельного параметра b_1 (в R_L) при той же геоцентрической скорости, чтобы космический аппарат «чиркнул» по поверхности Луны?

г) Определите значение скорости торможения v', необходимое для перевода космического аппарата на круговую орбиту вокруг Луны с радиусом $2R_L$.

Подсказка: орбиту Луны считать круговой, а ее массу и средний радиус равными 1/81 массы Земли и 1737 км, соответственно.

Решение:

а) Радиус сферы действия: $r_{C\Phi} = R_L\left(\frac{M_L}{M_Z}\right)^{\frac{2}{5}} = 66281\,км$.

Скорость входа в сферу действия Луны относительно Луны: $v_{BX} = \frac{2\pi a_L}{T_L} - v = 863\frac{м}{с}$.

Интеграл энергий: $v_{BX}^2 = GM\left(\frac{2}{r_{C\Phi}} - \frac{1}{a}\right) \Rightarrow a = -4{,}77R_L$.

б) Запишем законы сохранения:

$$v_{BX}b_0 = v_q q$$

$$\frac{v_{BX}^2}{2} - \frac{GM_L}{r_{C\Phi}} = \frac{v_q^2}{2} - \frac{GM_L}{q} \Rightarrow v_q = 1169\frac{м}{с}.$$

в) Запишем законы сохранения:

$$v_{BX}b_1 = v_q R_L$$

$$\frac{v_{BX}^2}{2} - \frac{GM_L}{r_{C\Phi}} = \frac{v_q^2}{2} - \frac{GM_L}{R_L} \Rightarrow b_1 = 2{,}90\,R_L.$$

г) Торможение производим в перицентре $q = 2R_L$.

$$v' = \sqrt{v_{BX}^2 + 2GM_L\left(\frac{1}{2R_L} - \frac{1}{r_{C\Phi}}\right)} - \sqrt{\frac{GM}{2R_L}} = 662\frac{м}{с}.$$

Ответ: а) $a = -4{,}77R_L$; б) $v_q = 1169\frac{м}{с}$; в) $b_1 = 2{,}90\,R_L$; г) $v' = 662\frac{м}{с}$.

Задание 3. Движение звезд. (20 баллов)

Некоторая, недавно открытая звезда, описывает вокруг полюса эклиптики окружность, угловой радиус которой $a = 20{,}51''$. За десять лет окружность превратилась в эллипс, эксцентриситет которого $e = 0{,}0001$, при этом, красное смещение в спектре звезды $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -0{,}01\%$.

а) Назовите ТРИ!!! причины, вследствие которых наблюдается все это.

б) На каком расстоянии от наблюдателя (в $пк$) находится звезда?

в) С какой линейной скоростью ($\frac{км}{с}$) звезда движется относительно Солнца.

г) Через сколько лет (если ничего не изменится) расстояние до звезды увеличится в три раза?

Подсказка: наблюдатель находится на Земле.

Решение:

а) Аберрация, годичный параллакс, собственное движение звезды.

б) Аберрационное и параллактическое смещения взаимно перпендикулярны:

$$\pi'' = \sqrt{20{,}51^2 - 20{,}48^2} = 1{,}109'';$$

$$r = \frac{1}{\pi''} = \frac{1}{1{,}109} = 0{,}902\,пк\,.$$

в) Собственное движение звезды:

$$\mu = \left(90° - a\sin\frac{\sqrt{1-e^2}}{1}\right)/10 = 2{,}063\frac{''}{год}$$

Линейная скорость звезды относительно Солнца:

$$v = \sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}c\right)^2 + \left(4{,}74\mu r\right)^2} = 31{,}27\frac{км}{с}.$$

г) Запишем условие увеличения расстояния до звезды в три раза:

$$\frac{\sqrt{\left(r + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}ct\right)^2 + \left(4{,}74\mu rt\right)^2}}{r} = \frac{1}{3} \Rightarrow t = 111279\,лет\,.$$

Ответ: а) аберрация, годичный параллакс, собственное движение звезды;

б) $r = 0{,}902\,пк$; в) $v = 31{,}27\frac{км}{с}$; г) $t = 111279\,лет$.

Задание 4. Излучение пульсара. (20 баллов)

Пульсар PSR B0531+21, находящийся в центре Крабовидной туманности, излучает радиоимпульсы с периодом $P = 33{,}5\,мс$.

а) Оцените запас энергии E этого пульсара, приняв характерные значения его радиуса $R = 10\,км$ и массы $M = M_S$.

б) Определите мощность W излучения пульсара (в единицах мощности излучения Солнца W_S), если известно, что скорость возрастания периода излучения его радиоимпульсов равна $\frac{\Delta P}{\Delta t} = 10^{-12,4}$.

в) Рассматривая пульсар как вращающийся наклонный магнитный диполь, излучающий магнитно-дипольное излучение, оцените значение индукции B магнитного поля на поверхности пульсара, если его магнитная ось перпендикулярно оси вращения.

г) Определите динамический возраст пульсара τ (в годах).

Подсказка: мощность магнитно-дипольного излучения определяется выражением $W = \frac{2\Omega^4}{3c^2} B^2 R^6 \sin^2\theta$, где Ω – угловая скорость вращения пульсара, θ – угол наклона магнитного дипольного момента к оси вращения пульсара, B – индукция магнитного поля, c – скорость света в вакууме (все в гауссовой $(г, см, с, Гс)$ системе единиц).

Решение:

а) Запас энергии пульсара:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = 1{,}41 \cdot 10^{42}\,Дж$$

б) Мощность излучения пульсара:

$$W = -\frac{\Delta E}{\Delta t} = \left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \frac{1}{P}\frac{\Delta P}{\Delta t} = 3{,}34 \cdot 10^{31}\,Вт = 8{,}7 \cdot 10^4 L_S\,.$$

в) Индукция магнитного поля:

$$B = \sqrt{\frac{3c^2 W}{2\Omega^4 R^6}} = 1{,}91 \cdot 10^7\,Гс\,.$$

г) Скорость возрастания периода излучения постоянна, поэтому:

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{P \cdot \Delta t}{\Delta P}\right) = 1330\,лет\,.$$

Ответ: $E = 1{,}41 \cdot 10^{42}\,Дж$; б) $W = 3{,}34 \cdot 10^{31}\,Вт = 8{,}7 \cdot 10^4 L_S$;

в) $B = 1{,}91 \cdot 10^7\,Гс$; г) $\tau = 1330\,лет$

Задание 5. Реликтовое излучение. (20 баллов)

На основе многолетних наблюдений реликтового излучения было установлено, что оно имеет чисто чернотельный спектр с температурой $T_0 = 2{,}725\,K$. Несмотря на то, что в 1992 г. было объявлено об открытии анизотропии реликтового излучения, ещё в 60-х годах XX века было известно о наличии так называемой дипольной составляющей анизотропии этого излучения: в направлении созвездия Льва температура излучения выше среднего значения, а в противоположном направлении – на столько же ниже среднего. Разброс значений температуры при этом составляет $\Delta T = 6{,}686\,мК$.

а) Определите скорость v движения Земли относительно реликтового излучения.

б) Вычислите концентрацию $n_Ф$ реликтовых фотонов и полную энергию U реликтового излучения во Вселенной в настоящее время.

в) Считая, что реликтовое излучение, заполняющее Вселенную, расширяется вместе с ней адиабатически, вычислить, какой была плотность ρ вещества во Вселенной в момент «отделения» излучения от вещества (результат представить в единицах массы Солнца на $1пк^3$).

г) Определить красное смещение z поверхности последнего рассеяния.

Подсказка: уравнение адиабаты $VT^3 = const$.

Решение:

а) Скорость движения Земли:

$$v = c\frac{\Delta T}{2T_0} = 368\,\frac{км}{с}.$$

б) Концентрация реликтовых фотонов:

$$n_Ф = 19{,}2\pi\left(\frac{kT}{hc}\right)^3 = 4{,}08\cdot 10^8\,\frac{фотонов}{м^3}.$$

Энергия одного фотона:

$$U_0 = \frac{hcT_0}{b} = 1{,}87\cdot 10^{-25}\,Дж.$$

Положим радиус Вселенной $R = 15\,Гпк$.

$$U = \frac{4}{3}\pi R^3 n_Ф E_0 = 3{,}16\cdot 10^{67}\,Дж.$$

в) Плотность реликтового излучения в момент отделения его от вещества:

$$\rho = \rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^3 = 1{,}33\cdot 10^{-17}\,\frac{кг}{м^3} = 196\,\frac{M_S}{пк^3}.$$

г) Красное смещение поверхности последнего рассеяния:

$$z = \frac{T_Z}{T_0} - 1 = 1100.$$

Ответ: а) $v = 368\,\frac{км}{с}$; б) $n_Ф = 4{,}08\cdot 10^8\,\frac{фотонов}{м^3}$, $U = 3{,}16\cdot 10^{67}\,Дж$;

в) $\rho = 196\,\frac{M_S}{пк^3}$; г) $z = 1100$.