

1. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $BC$ . На сторонах  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  отмечены точки  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно так, что треугольники  $ABC$  и  $YXZ$  подобны. Точка  $W$  симметрична точке  $X$  относительно середины стороны  $BC$ .

Докажите, что точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $W$  лежат на одной окружности.

2. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{2022!} > \frac{1^2}{2!} + \frac{2^2}{3!} + \frac{3^2}{4!} + \dots + \frac{2022^2}{2023!}.$$

3. Натуральные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют равенству  $a + \tau(a) = b^2 + 2$ , где через  $\tau(n)$  обозначено количество всех натуральных делителей числа  $n$ , включая 1 и само число  $n$ .

Докажите, то число  $a + b$  чётно.

4. На доске записаны числа  $1, 2, \dots, 50$ . Аня проделывает следующие действия: стирает с доски любые два числа  $a$  и  $b$ , записывает на доску вместо них одно число — их сумму  $a + b$ , после чего выписывает себе в блокнот число  $ab(a + b)$ . Когда после 49 таких действий на доске осталось ровно одно число, Аня нашла сумму  $S$  всех 49 чисел, выписанных в блокнот.

а) Докажите, что  $S$  не зависит от порядка действий Ани.

б) Вычислите  $S$ .