

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

9 класс

5. Докажите, что для любого натурального числа n существуют натуральные числа a , b и c , такие что $a^2 - n = xy$, $b^2 - n = yz$ и $c^2 - n = xz$, где x , y и z — какие-то попарно различные натуральные числа.

6. Медианы прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C пересекаются в точке M . Из точки B провели биссектрису BL и оказалось, что $\angle BML = 90^\circ$.

Найдите отношение длин $AB : BC$.

Ответ: 3 : 1.

7. Известно, что число $(x - y)^3$ делится на $6x^2 - 2y^2$, где x и y — некоторые заданные целые числа.

Докажите, что и $(x + y)^3$ делится на $6x^2 - 2y^2$.

8. Дано натуральное число n . *Перестановкой* называется любой упорядоченный набор, составленный из чисел $1, 2, \dots, n$, взятых каждое по одному разу. *Инверсией* перестановки называется количество пар (i, j) чисел таких, что $i < j$ но i -ое по счёту число больше j -го.

Докажите, что для каждого натурального числа $k \leq n$ существует ровно $\frac{n!}{k}$ перестановок, в которых количество инверсий кратно k .