LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

9 класс

1. Центром тяжести многоугольника, нарисованного на координатной плоскости, называется точка, координаты которой равны среднему арифметическому соответствующих координат вершин многоугольника.

Можно ли на координатной плоскости нарисовать два одинаковых многоугольника, у которых нет общих точек, но совпадают центры тяжести?

Ответ: Да, можно.

2. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C построили две окружности равного радиуса так, что они: касаются друг друга в точке Q, касаются гипотенузы AB, а также, одна из них касается катета AC, а другая — катета BC. На катете BC отметили точку P, для которой $\angle PAB = 45^\circ$.

Найдите угол между прямой PQ и гипотенузой AB.

Ответ: 90°.

3. Назовём разбиение множества чисел 2^0, 2^1, $\ldots$, 2^{3n-1} на тройки (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), $\ldots$, (a_n, b_n, c_n) *хорошим*, если каждый из квадратных трёхчленов

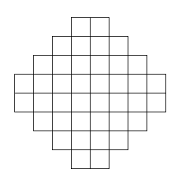
$$a_1^2x^2 + b_1x + c_1^4, \quad a_2^2x^2 + b_2x + c_2^4, \quad \ldots, \quad a_n^2x^2 + b_nx + c_n^4$$

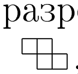
имеет хотя бы один действительный корень.

Найдите все хороших разбиения, считая разбиения, которые отличаются лишь порядком следования троек, одинаковыми.

Ответ: Существует единственное хорошее разбиение, состоящее из троек $(2^{2n-k}, 2^{2n+k-1}, 2^{k-1})$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

4. Ацтекским диамантом порядка n называется фигура на координатной плоскости, состоящая из единичных квадратов, центры которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leqslant n$. На рисунке справа изображён ацтекский диамант порядка 4.



Можно ли разрезать ацтекский диамант порядка 2020 на фигурки вида , состоящие из четырёх клеток. (Фигурки можно вращать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.)

Ответ: нет.