8 класс

2-й вариант

1-й тур = 1-й день

8.1. Обозначим через $\overline{abc}$ трехзначное число, составленное из цифр *a, b, c*. Найдите всевозможные числа $\overline{abc}$ такие, что $\overline{abc} = -a + b^c$

Ответ: 127. $\left[127 = -1 + 2^7\right]$

Решение: Т.к. $b^c = \overline{abc} + a,\ 100 \le \overline{abc} \le 999,\ 1 \le a \le 9,$ то $101 \le b^c \le 1008.$
Поэтому, если $b = 2$, то $101 \le 2^c \le 1008,$ значит, $c = 7,8,9;$
если $b = 3$, то $c = 5;6;$
если $b = 4$, то $c = 4;$
если $b = 5$, то $c = 3;4;$
если $b = 6$, то $c = 3;$
если $b = 7$, то $c = 3;$
если $b = 8$, то $c = 3;$
если $b = 9$, то $c = 3.$
Т.к. $100a + 10b + c = -a + b^c,$ то $b^c - \overline{bc} = 101a$ делится на 101.
Рассматривая вышеуказанные пары чисел b и c получаем, что $b^c - \overline{bc}$ делится на 101 при $\begin{cases} b = 2 \\ c = 7. \end{cases}$
То есть, $101a = b^c - \overline{bc} = 2^7 - 27 = 101,\ a = 1.$ Итак, $\overline{abc} = 127.$

8.2. В четырехугольнике *ABCD* диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*, причем *AO* = *OC* = *AB*, *OD* = 2·*OB*. Найдите длину стороны *CD*, если известно, что длина стороны *BC* равна 1.

Ответ: 1.

Решение. Пусть $ABCD$ - четырехугольник, который удовлетворяет условиям задачи. Тогда треугольник *ABO* равнобедренный. Проведем AH – биссектрису угла $BAO.$ Она же высота и медиана, т.е. $BH = HO.$ Опустим из C перпендикуляр на BD. Треугольники *AHO* и *CEO* равны по гипотенузе и острому углу. Откуда следует, что HO = OE. Но так как $OD = 2BO,$ то
$ED = OD - OE = 2BO - OE = 4HO - OE = 4OH - OH = 3OH = BE,$ т.е. в треугольнике *BCD* отрезок CE - высота и медиана. Следовательно, треугольник *BCD* – равнобедренный, и $BC = CD = 1.$

8.3. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x + 2y + 4z = 1000$?

Ответ: 62750.

Решение: z может принимать значения от 0 до 250. Тогда x + 2y = 1000 – 4z, причем x обязательно четно, т.е. x = 2p, откуда 2p + 2y = 1000 – 4z, или p + y = 500 – 2z.

При каждом p от 0 до 500 – 2z неизвестная y принимает единственное значение. Таким образом, при каждом z от 0 до 250 существует 500 – 2z решений. Осталось просуммировать значения 0 + 2 + 4 + 6 + ... + 500 = 0,5(500+2)·250 = 62750.

8.4. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Весь путь разбит на три участка. Известно, что длина первого в 8 раз больше длины второго. Определите среднюю скорость движения велосипедиста на всем пути, если известно, что она равна скорости движения на третьем участке, на 4 км меньше скорости движения на первом участке и на 26 км больше половины скорости движения на втором участке.

Ответ: 36 км/ч.

Первое решение (*основано на определении общего времени движения***).** Решение. Пусть искомая скорость движения – x км/ч, расстояние AB=S км, длина первого участка равна $8y$, второго – y, третьего – (S-9y). Время, затраченное велосипедистом на весь путь равно $T = S/x$, время, затраченное на прохождение первого участка – $t_1 = 8y/(x+4)$, второго участка – $t_2 = y/(2x-52)$, третьего участка – (S-9y)/x. Тогда

$$\frac{S}{x} = \frac{8y}{x+4} + \frac{y}{2x-52} + \frac{S-9y}{x}.$$

Преобразовывая и упрощая это выражение, получим квадратное уравнение относительно переменной *x,* положительным корнем которого является $x = 36$ км/ч.

Второе решение (*основано на определении средней скорости***).**

Воспользуемся обозначениями из первого решения. Средняя скорость движения и скорости на первом и втором участках равны:

$x = v_{ср} = \dfrac{AB}{T} = \dfrac{S}{t_1 + t_2 + t_3}$, где $T = t_1 + t_2 + t_3$ – общее время движения.

$v_1 = x + 4$, а $t_1 = \dfrac{8y}{x+4}$;

$v_2 = 2x - 52$, а $t_2 = \dfrac{y}{2x-52}$.

Тогда

$x = v_{ср} = \dfrac{9y+Z}{t_1+t_2+t_3} = \dfrac{Z}{t_3} = \dfrac{9y}{t_1+t_2}$, где Z – длина третьего участка. Здесь последнее равенство следует из очевидных соображений:
$(9y+Z)t = Z(t+t_2+t_4)$.

Отсюда $x = \dfrac{9y}{\dfrac{8y}{x+4}+\dfrac{y}{2x-52}}$ или, после упрощений $x^2+16x-1872=0$.
Последнее уравнение имеет два корня: x=36 и x=-52.

Последнее уравнение имеет единственное положительное решение $x = 36$.