Вариант 2

Задания теоретического тура

1. Короткие задачи (25 баллов)

1.1. Укажите, когда горизонт совпадает с видимым годовым движением Солнца среди звезд. Где на Земле мы можем это увидеть? (2 балла)

Решение и ответ.

В момент восхода (звездное время 18 ч) и захода (звездное время 6 ч) точки весеннего равноденствия. Увидеть можем на северном и южном полярных кругах.

1.2. Спустя какой промежуток времени после своей верхней кульминации Солнце будет находиться на высоте 20° в Минске ($\varphi = 53^{o}54'$), если склонение Солнца $\delta = 23^{o}05'$? (2 балла)

Решение.

$\cos z = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t \Rightarrow \cos t = -0{,}058 \Rightarrow t = 6^h 13^m 18^s$

$S = \alpha + t = 8^h 45^m 06^s$

Ответ: $S = \alpha + t = 8^h 45^m 06^s$.

1.3. Найдите изменение потенциальной энергии ракеты при подъеме ее с поверхности Земли на высоту h. (3 балла)

Решение и ответ.

Потенциальная энергия тела, расположенного на некотором расстоянии от Земли, равна

$U = -GMm/r$,

где G – гравитационная постоянная, M – масса Земли , m – масса тела, r – расстояние от центра тела до центра Земли.

Изменение потенциальной энергии при подъеме будет

$U = U_2 - U_1 = -GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$

$r_1 = R$ (радиусу Земли), а $r_2 = R + h$

Тогда $\Delta U = \frac{GMm}{R} \cdot \frac{h}{R+h}$

1.4. Видимые звездные величины двух звезд в желтых лучах одинаковы и равны V=7,2. В синих лучах различны и равны B_1=7,0 и B_2=8,5 соответственно. Определить их основные показатели цвета. Какая звезда и во сколько раз излучает больше энергии в синих лучах? Считать, что звезды находятся на одном и том же расстоянии от наблюдателя. (3 балла)

Решение.

Основной показатель цвета 1-й звезды будет равен $B-V=7{,}0-7{,}2=-0{,}2$, второй звезды $B-V=8{,}5-7{,}2=1{,}3$.
Так, как звездная величина 1-й звезды меньше чем второй

$$\frac{E_1}{E_2}=2{,}512^{(B-V)_2-(B-V)_1}=2{,}512^{1{,}5}=4$$

Первая звезда излучает энергии в 4 раза больше чем 2-я.

Ответ: Первая звезда излучает энергии в 4 раза больше чем 2-я.

1.5. Большая полуось периодической кометы равна 26,7 а.е., а площадь плоскости, ограниченной орбитой этой кометы составляет $1{,}34 \cdot 10^3$ а. е.^{2}. Вычислите скорость кометы, в момент времени, когда модуль ее радиус-вектора равен малой полуоси орбиты. (3 балла)

Решение.

$S = \pi ab$,

где S – площадь плоскости, ограниченной орбитой, a – большая и b – малая полуоси орбиты кометы.

$$\mathrm{b} = \frac{\mathrm{S}}{\pi a} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{GM_{\odot}\left(\frac{2}{\mathrm{b}} - \frac{1}{a}\right)} = 8{,}85\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Ответ: $S = 1{,}34 \cdot 10^3$ а. е.^{2}

1.6. Найти перигелийное и афелийное расстояния, сидерический и синодический периоды обращения, а также круговую скорость малой планеты Поэзии, если большая полуось и эксцентриситет ее орбиты равны 3,12 а. е. и 0,144. (3 балла)

Решение.

$q = \mathrm{a}(1 - \mathrm{e}) = 3{,}12(1 - 0{,}144) = 2{,}67$ а. е.

$Q = a(1+e) = 3{,}12(1+0{,}144) = 3{,}57$ а. е.

$T = \sqrt{\mathrm{a}^3} = 5{,}51$ года

$S = \frac{T}{T-1} = 1{,}22$ года

$\upsilon = \frac{2\pi \mathrm{a}}{\mathrm{T}} = 16{,}9$ км/с

Ответ: $q = 2{,}67$ а. е., $Q = 3{,}57$ а. е., $T = 5{,}51$ года, $S = 1{,}22$ года, $\upsilon = 16{,}9$ км/с.

1.7. Плеяды (M45) имеют видимый блеск $m = 1{,}6^m$. Из какого максимального числа видимых невооруженным глазом звезд состоит это скопление? (2 балла)

Решение.

$\mathrm{m} = -2{,}5\lg\sum_{i=1}^{n} 2{,}512^{-m_i} = m_0 - 2{,}5lgN \Rightarrow N = 10^{\frac{\mathrm{m_0 - m}}{2{,}5}} = 58$

<u>Ответ</u>: N = 58 шт.

1.8. Известно, что крылья бабочек обладают уникальными оптическими свойствами. Несмотря на свою хрупкость, они достаточно сложны в своей структуре, и это тенденция, присущая всем видам из всех семейств. Так отражательная способность крыльев бабочек из семейства Papilionidae практически равна 0, что обусловлено их полидисперсной сотовой структурой. Учитывая, что в среднем у бабочек из семейства Papilionidae площадь крыльев S = 20 см^2 , вычислите светимость бабочки. На какой спектральный диапазон приходится максимум излучения такой бабочки? Температуру крыльев принять равной t = 30 °C. Постоянная Вина b = $2{,}9 \cdot 10^{-3}$м·К, постоянная Стефана-Больцмана σ = 5,67 $\cdot 10^{-8}$ Вт·м$^{-2}$·К$^{-4}$. (3 балла)

<u>Решение.</u>

$L = \sigma T^4 S = 0{,}96$ Вт/м^2 – светимость средней бабочки семейства Papilionidae

$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} = 9{,}570$ мкм – длина волны, на которую приходится максимум излучения бабочки ⇒ Диапазон - ИК

<u>Ответ:</u> L = 0,96 Вт/м^2; $\lambda_{\max}$ = 9,57 мкм - ИК;

1.9. Вычислите расстояние до квазара в закрытой пульсирующей модели Вселенной, если в его спектре эмиссионная линия водорода H_β с длиной волны 4861 Å занимает положение, соответствующее длине волны 5421 Å. Постоянную Хаббла принять равной H = 70,1 км/(с·Мпк). (2 балла)

<u>Решение.</u>

$\mathrm{z} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0{,}115$ – красное смещение квазара

$\mathrm{r} = \frac{c}{H} \cdot \frac{z}{z+1} = 619$ Мпк – расстояние до квазара

<u>Ответ:</u> $\mathrm{r} = 619$ Мпк.

1.10. Вычислите массу покоя черной дыры, радиус Шварцшильда которой равен $\mathrm{R}_{2,5} = 7{,}4$ км. (2 балла)

<u>Решение.</u>

$\mathrm{R} = \frac{2GM}{c^2}$ – радиус Шварцшильда черной дыры ⇒ $\mathrm{M} = \frac{\mathrm{R}c^2}{2G}$ ⇒

$\mathrm{E} = \mathrm{M}c^2 = \frac{\mathrm{R}c^4}{2G} = 4{,}5 \cdot 10^{47}$Дж

<u>Ответ</u>: $\mathrm{E} = 4{,}5 \cdot 10^{47}$ Дж .

2. Hg_{200}^{80} [1] (25 баллов)

Как и земляне, астрономы Меркурия используют такой же метод для определения понятий параллаксов и парсека, но измеряют их в других единицах. Например, расстояние до Сириуса равно 1,406 мепк (меркурианских парсек).

a) Опишите систему угловых размеров, используемых астрономами Меркурия. Земной параллакс Сириуса равен π = 0,379''. (12 баллов)

Решение.

Расстояние до Сириуса:

$\mathrm{L} = \frac{1}{\pi} = 2{,}64 \text{ пк} = 544\ 000 \text{ а. е.}$

Эта величина равна 1,406 мепк ⇒ $1 \text{ мепк} = \frac{206265}{0{,}379 \cdot 1{,}406} = 3{,}87 \cdot 10^5 \text{а. е.}$

Эта величина в точности равна 10^6 полуосей орбиты Меркурия. Значит, что астрономы Меркурия измеряют годичный параллакс в микрорадианах и определяют так «их парсек».

Ответ: $1 \text{ мепк} = 3{,}87 \cdot 10^5 \text{а. е.}$

b) Вычислите меркурианский горизонтальный (суточный) параллакс Солнца. Ответ необходимо дать в меркурианских угловых единицах (меуе). Экваториальный диаметр Меркурия d_M = 4879 км, среднее расстояние до Солнца $a_M = 0{,}387$ а. е. (13 баллов)

Решение.

Меркурианский горизонтальный (суточный) параллакс Солнца равен:

$\rho_{\mathrm{M}}(\text{Солнце}) = \frac{\mathrm{r}_M}{a_M} = \frac{d_M}{2a_M} = 40{,}9 \cdot 10^{-6} \text{рад} = 40{,}9$ меркурианских угловых единиц

Ответ: $\rho_{\mathrm{M}}(\text{Солнце}) = 40{,}9$ меркурианских угловых единиц.

3. «Двое: я и моя тень»[2] (30 баллов)

Две звезды, радиусы которых R_1 = 6000 км и R_2 = 3000 км, вращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Расстояние от поверхности одной звезды до другой составляет a = 30000 км.

a) Вычислите наибольшее значение угла наклона плоскости орбиты этой двойной звездной системы к лучу зрения, при котором еще не будет наблюдаться затмение. (10 баллов)

---

[1] Ртуть (англ. Mercury) – названа также в честь Бога Меркурия.

[2] Американский семейный фильм с участием сестёр Олсен в главных ролях.

Решение.

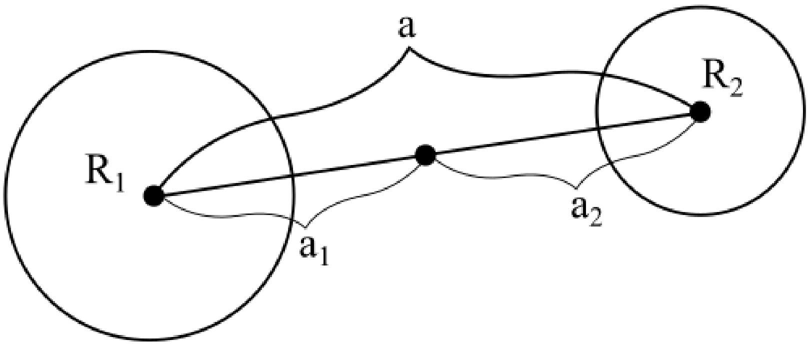

Рисунок 1 – Обращение двух звезд вокруг общего центра масс

$\sin i = \frac{R_1+R_2}{a+R_1+R_2}$, откуда i=13.29

Ответ: i=13.29.

b) Найдите большие полуоси их орбит. (10 баллов)

Решение.

Звезды взаимодействуют между собой с силой $F = \frac{GM_1M_2}{(a+R_1+R_2)^2}$.

Тогда $F = \frac{GM_1M_2}{(a+R_1+R_2)^2} = M_1\frac{v_1^2}{a_1}$; $\frac{GM_2M_2}{(a+R_1+R_2)^2} = M_2\frac{v_2^2}{a_2}$, где a_1 и a_2 - расстояние от центров масс звезд до центра массы системы $\frac{v_1^2}{a_1} = \omega^2 \mathrm{a}_1$, $\frac{v_2^2}{a_2} = \omega^2 \mathrm{a}_2$.

Из этого следует:

$$\begin{cases} \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 = a + R_1 + R_2 \\ \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_2} = \frac{M_2}{M_1} \end{cases}$$

решая эту систему уравнений получаем

$\mathrm{a}_1 = a + R_1 + R_2 + \frac{M_1+M_2}{M_1(a+R_1+R_2)}$, $\mathrm{a}_2 = \frac{M_1+M_2}{M_1(a+R_1+R_2)}$

Ответ: $\mathrm{a}_1 = a + R_1 + R_2 + \frac{M_1+M_2}{M_1(a+R_1+R_2)}$, $\mathrm{a}_2 = \frac{M_1+M_2}{M_1(a+R_1+R_2)}$.

c) Линейные скорости их движения. (10 баллов)

Решение.

Тогда $v_1 = \frac{\sqrt{GM_2(a+R_1+R_2+\frac{M_1+M_2}{M_1(a+R_1+R_2)})}}{a+R_1+R_2}$, $v_2 = \frac{GM_1\frac{M_1+M_2}{M_1(a+R_1+R_2)}}{a+R_1+R_2}$

Ответ: $v_1 = \frac{\sqrt{GM_2(a+R_1+R_2+\frac{M_1+M_2}{M_1(a+R_1+R_2)})}}{a+R_1+R_2}$, $v_2 = \frac{GM_1\frac{M_1+M_2}{M_1(a+R_1+R_2)}}{a+R_1+R_2}$.

4. Неудавшаяся звезда (20 баллов)

При описании Юпитера очень часто используется превосходная степень. Все потому, что он не только самый большой объект во всей Солнечной системе, но и самый загадочный. А еще первый по массе, вращательной скорости и второй по яркости. Если сложить вместе все планеты, луны, астероиды, кометы системы, Юпитер все равно будет больше их вместе взятых. Загадочный же он потому, что составные компоненты этого объекта содержатся в веществе, из которого сделана вся Солнечная система. И все, что происходит на поверхности и в недрах гиганта можно считать образцом синтеза материалов, который происходит при формировании планет и галактик. Более того, будь Юпитер еще массивнее и крупнее, он вполне мог бы быть «коричневым карликом».

В данной задаче Вам предлагается рассчитать линейную скорость движения Солнца относительно центра масс системы Солнце-Юпитер, считая их материальными точками. Масса Юпитера принять равной 0,001 массы Солнца, а большую полуось орбиты Юпитера 5,2 а.е.

<u>Решение.</u>

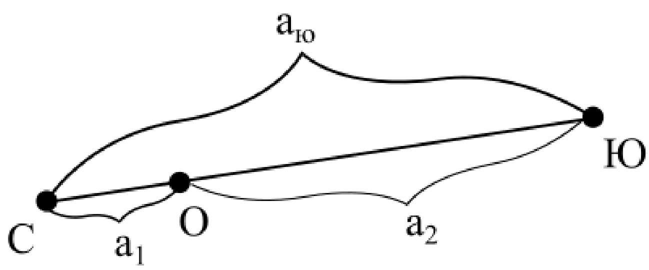

Рисунок 2 – Обращение вокруг центра масс Солнца и Юпитера

Центр массы системы Солнце-Юпитер расположены на отрезке, соединяющем их центры в точке О, расположенной между ними; a_1 и a_2 – большие полуоси орбит Солнца и Юпитера в системе центра масс Солнце-Юпитер соответственно.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a_ю \\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{М_ю}{М_с} \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{М_ю}{М_ю + М_с} a_ю = 7{,}38 \cdot 10^5 \text{ км}$$

Периоды обращения Солнца и Юпитера относительно центра масс системы Солнце-Юпитер будет одинаковы. Период обращения Юпитера найден из третьего закона Кеплера полагая что $a_ю = a_2$.

$$\frac{T_ю^2}{T_\oplus^2} = \frac{a_ю^3}{a_\oplus^3} \Rightarrow T_Ю = T_\oplus \sqrt{\frac{a_ю^3}{a_\oplus^3}} = 11{,}86 \text{ лет}$$

Таким же будет и период обращения Солнца вокруг центра масс Солнца-Юпитер, $T_ю = T_с$. Тогда линейная скорость Солнца в системе Солнце-Юпитер будет:

$$\upsilon_с = \frac{2\pi a_1}{T_с} = \frac{2\pi a_1}{T_ю} = 0{,}012\,\frac{км}{с}$$

<u>Ответ:</u> $\upsilon_с = 0{,}012\,\frac{км}{с}$.