Республиканская физическая олимпиада 2023 года
(Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач
9 класс
(для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 1. Термометр Галилея. (Решение).

Часть 1. Тепловое расширение.

1.1 Все линейные размеры, в том числе и радиус отверстия увеличатся, поэтому площадь отверстия также **увеличится**. Изменение площади отверстия равно

$$\Delta S = \left(Rb\left(1+\alpha\Delta t\right)\right)^2 - b^2 \approx 2b\alpha\Delta t\,. \qquad (1)$$

1.2 Рассмотрим куб с блинной ребра a_0, изготовленный из рассматриваемого материала. Длина ребра куба изменяется по закону

$$a = a_0\left(1+\alpha\Delta t\right). \qquad (2)$$

Тогда объем куба станет равным

$$V = a^3 = a_0^3\left(1+\alpha\Delta t\right)^3 \approx V_0\left(1+3\alpha\Delta t\right). \qquad (3)$$

При нагревании тела его масса не изменяется, поэтому плотность тела станет равной

$$\rho = \frac{m}{V_0\left(1+3\alpha\Delta t\right)} \approx \frac{m}{V_0}\left(1-3\alpha\Delta t\right) = \rho_0\left(1-3\alpha\Delta t\right).$$

Здесь мы использовали приближенную формулу $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$. Из сравнения с формулой, приведенной в условии, находим, что

$$\gamma = -3\alpha\,. \qquad (4)$$

Часть 2. Массы поплавков.

2.1 Поплавок находится в равновесии, если сила тяжести уравновешивается выталкивающей силой Архимеда. При увеличении температуры плотность воды уменьшается, поэтому уменьшается сила Архимеда, поэтому шарик начнет **тонуть**.

2.2 Плавать будут те поплавки, для которых температура всплытия, больше температуры воды, а утонут те, у которых указанная на бирках температура меньше температуры воды. Поэтому температура воды лежит в диапазоне от максимальной среди плавающих поплавков, до минимальной среди утонувших поплавков. В качестве измеренной температуры можно взять **среднее значение этих температур**. В качестве оценки погрешности разумно взять **половину разности этих температур**.

2.3 При температуре всплытия сила тяжести шарика уравновешивается силой Архимеда, которая изменяется при изменении температуры:

$$mg = F_A \qquad (5)$$

Сила Архимеда рассчитывается по формуле

$$F_A = \rho_0 V g = \frac{Vg}{v_0}\,, \qquad (6)$$

Здесь

$$V = V_{шарик} + V_{бирки} = \frac{\pi D^3}{6} + \frac{m_1}{\rho_1}\,. \qquad (7)$$

- объем поплавка с биркой.

Из этих формул, следует, что масса поплавка с биркой должна быть равна

$$m_0 + m_1 = \frac{1}{v_0}\left(\frac{\pi D^3}{6} + \frac{m_1}{\rho_1}\right) \qquad (8)$$

Из этого уравнения находим необходимую массу бирки

$$m_1 = \frac{\frac{1}{v_0}\frac{\pi D^3}{6} - m_0}{\left(1 - \frac{1}{\rho_1 v_0}\right)} \qquad (8)$$

2.4. При учете теплового расширения стеклянного поплавка, формула (8) преобразуется к виду (связанному с изменением диаметра поплавка)

$$m_1 = \frac{\frac{1}{v_0}\frac{\pi D^3}{6}\left(1 + 3\alpha(t - t_0)\right) - m_0}{\left(1 - \frac{1}{v_0 \rho_1}\right)} \qquad (9)$$

Из формул (8) -(9) следует, что массу каждой бирки следует увеличить на

$$\Delta m_1 = \frac{\frac{\pi D^3}{6 v_0}}{\left(1 - \frac{1}{v_0 \rho_1}\right)} 3\alpha(t - t_0) \qquad (10)$$

Результаты расчетов масс бирок и их изменения, проведенные по формулам (8) и (9) приведены в Таблице.

Таблица результатов расчетов.

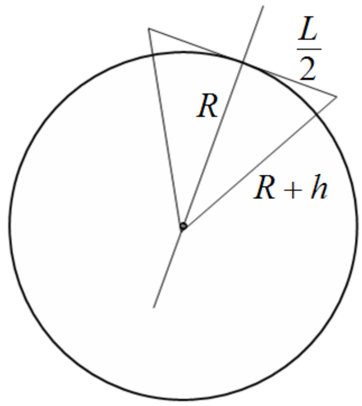
$t, °C$	$\rho\ \frac{г}{см^3}$	m, г	Δm, мг
15	0,99913	0,195	-0,609
20	0,99823	0,191	0,000
25	0,99707	0,186	0,608
30	0,99567	0,180	1,214
35	0,99406	0,173	1,817

2.5 Общая масса золота равна сумме всех чисел в 2 последних столбцах данной таблицы. Она равна

$$m = 0{,}922 г \qquad (11$$

Задание 2. Как измеряли Вселенную. Решение.

Часть 1. Радиус Земли.



1.1 Элементарный построения условия видимости приводят к уравнению, следующему из теоремы Пифагора

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = (R+h)^2 - R^2 \approx 2Rh. \qquad (1)$$

Мы пренебрегли малым слагаемым h^2. Из этой формулы следует, что радиус Земли равен

$$R = \frac{L^2}{8h}. \qquad (2)$$

Численный подсчет дает результат

$$R \approx 6{,}3 \cdot 10^6\,м. \qquad (3)$$

Часть 2. Масса Земли.

2.1 Из закона всемирного тяготения можно записать формулу для ускорения свободного падения

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}. \qquad (4)$$

Из этой формулы находим массу Земли $M = \frac{g_0 R^2}{G} = 5{,}9 \cdot 10^{24} кг$.

Средняя плотность Земли равна

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3g_0}{4\pi RG} = 5{,}55 \cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3} \qquad (5)$$

Часть 3. Расстояние до Луны.

3.1 Расстояние от Земли до Луны можно найти r, рассматривая движение Луны с точки зрения законов динамики (2 закон Ньютона и закон всемирного тяготения):

$$m\omega^2 r = G\frac{mM}{r^2}. \qquad (6)$$

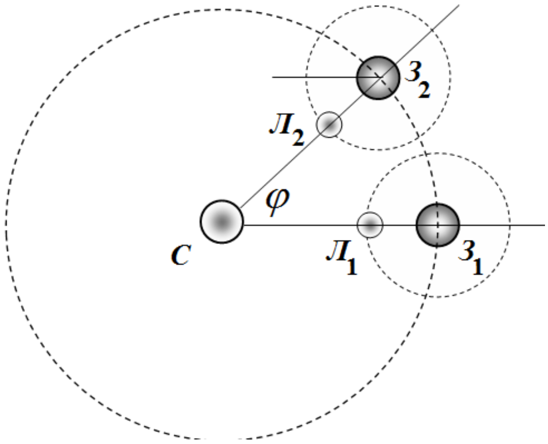
Где m - масса Луны, M - масса Земли, $\omega = \frac{2\pi}{T_Л}$ - угловая скорость движения Луны вокруг Земли. Для упрощения расчетов можно использовать формулу (4):

$$\left(\frac{2\pi}{T_Л}\right)^2 r = \frac{g_0 R^2}{r^2}. \qquad (7)$$

Из этой формулы находим радиус лунной орбиты

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(\frac{2\pi}{T_Л}\right)^2}}\,. \qquad (8)$$

Теперь необходимо учесть, что время между двумя новолуниями не равно периоду обращения Луны вокруг Земли. Обозначим $T_З$ период обращения Земли вокруг Солнца (1 год). На рисунке показано положение Солнца, Земли и Луны в два последовательных новолуния. Очевидно, что время между полнолуниями (которые легче наблюдать) равно времени между новолуниями. За время между новолуниями τ Луна по своей орбите повернется на угол $\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_З}\tau\right)$, поэтому можно записать:



$$\tau = \frac{\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_З}\tau\right)}{\omega_Л} = \frac{\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_З}\tau\right)}{2\pi} T_Л\,. \qquad (9)$$

Из этой формулы следует, что период обращения Луны описывается формулой:

$$\frac{1}{T_Л} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_З}\,. \qquad (10)$$

Подставляя это выражение в формулу (8) получим

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(2\pi\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_З}\right)\right)^2}}\,. \qquad (11)$$

Для численных расчетов необходимо подставить все значения в системе СИ:

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(2\pi\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_З}\right)\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}81\frac{м}{с^2}\left(6{,}5\cdot 10^6\,м\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{24\cdot 3600\,с}\left(\frac{1}{29{,}5} + \frac{1}{365{,}25}\right)\right)^2}} = 3{,}9\cdot 10^8\,м\,. \qquad (12)$$

Часть 4. Масса Солнца.

4.1 Запишем второй закон Ньютона (в совокупности с законом всемирного тяготения) для движения Земли

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = G\frac{mM}{R^2}\,. \qquad (13)$$

Где m - масса Земли, M - масса Солнца, R - радиус Земной орбиты, $T = 1\ год$ - период обращения Земли вокруг Солнца. Из этого уравнения выразим массу Солнца

$$M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R^3}{G}\,. \qquad (14)$$

Радиус орбиты найдем из данных радиолокационных измерений

$$R = c\frac{\tau}{2}\,. \qquad (15)$$

Окончательно для массы Солнца получим

$$M = \frac{1}{G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{c\tau}{2}\right)^3. \qquad (16)$$

Подставим численные значения и вычислим

$$M = \frac{1}{G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{c\tau}{2}\right)^3 = \frac{1}{6{,}67\cdot 10^{-11}}\left(\frac{2\pi}{365{,}25\cdot 24\cdot 3600}\right)^2 \left(\frac{3\cdot 10^8\cdot 16{,}7\cdot 60}{2}\right)^3 = 2{,}0\cdot 10^{30}\,\text{кг}\,.$$

Задание 3. Изменение мощности. Решения.

Часть 1. Один реостат.

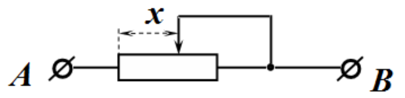
Мощность электроплитки рассчитывается по формуле $P = \dfrac{U_0^2}{R}$. Поэтому в относительных единицах эта величина равна

$$p = \frac{U_0^2}{R}\frac{R_0}{U_0^2} = \frac{1}{r}. \qquad (1)$$

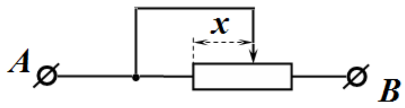
1.1 Так как вторая часть реостата «закорочена», то «работает» только его первая часть, поэтому сопротивлением между клеммами равно

$$R = R_0 \frac{x}{l}. \qquad (2)$$

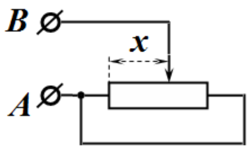
1.1



1.2



1.3



Или в относительных единицах

$$r = z. \qquad (3)$$

Тогда мощность плитки равна

$$p = \frac{1}{z}. \qquad (4)$$

1.2 В этом случае ситуация обратная, поэтому

$$r = 1 - z. \qquad (5)$$

И мощность

$$p = \frac{1}{1-z}. \qquad (6)$$

1.3 Не сложно заметить, что в данном случае два участка реостата подключены к клеммам параллельно, поэтому общее сопротивление равно

$$R = \frac{R_x(R_0 - R_x)}{R_0}. \qquad (7)$$

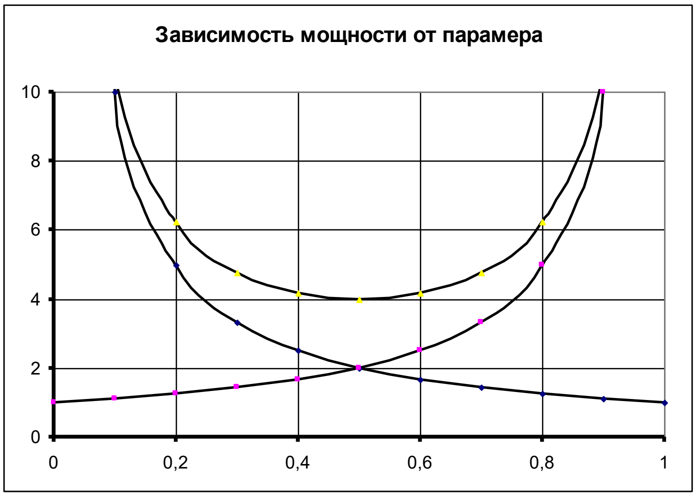
В относительных единицах эта функция имеет вид

$$r = z(1-z). \qquad (8).$$

Формула для мощности имеет вид

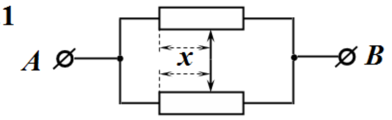
$$p = \frac{1}{z(1-z)}. \qquad (9)$$

Графики этих функция показаны на рисунке.

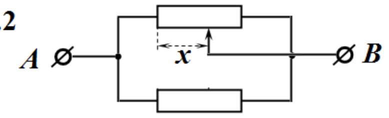


Часть 2. Два реостата.

2.1



2.2



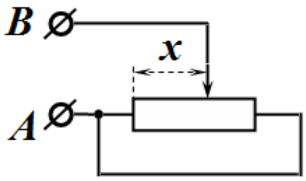
2.1 В этой схеме электрический ток через перемычку не идет, поэтом мы имеем два параллельно соединенных реостата. Общее сопротивление не зависит от положения движков реостата и равно

$$R_{AB} = \frac{R_0}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p = z\,. \tag{10}$$

2.2 В этой схеме параллельно соединены участок первого реостата и полностью второй реостат. Сопротивление такой схемы равно

$$R_{AB} = \frac{R_0 R_x}{R_0 + R_x} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{z}{1+z} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1+z}{z}\,. \tag{11}$$

Часть 3. Нелинейный реостат.



3.1 Зависимость сопротивления цепи от величины x описывается функцией

$$R_{AB} = \frac{R(x)(R_0 - R(x))}{R_0}\,. \tag{12}$$

В этом выражении величина R_0 также неизвестна. Однако ее можно найти, анализируя зависимость R_{AB} от $R(x)$. Как следует из выражения (8) эта функция достигает максимума при $R(x) = \frac{R_0}{2}$, при этом

$$(R_{AB})_{\max} = \frac{R(x)(R_0 - R(x))}{R_0} = \frac{\frac{R_0}{2}\left(R_0 - \frac{R_0}{2}\right)}{R_0} = \frac{R_0}{4}\,. \tag{13}$$

В таблице 1 находим, что $(R_{AB})_{\max} = 25{,}0\ \text{Ом}$. Следовательно,

$$R_0 = 100\ \text{Ом}. \tag{14}$$

3.2 Теперь уравнение (8) можно переписать в безразмерных параметрах

$$r_{AB} = r(z)(1 - r(z))\,. \tag{15}$$

Данное уравнение является квадратным относительно функции $r(z)$:

$$r^2 - r + r_{AB} = 0\,. \tag{16}$$

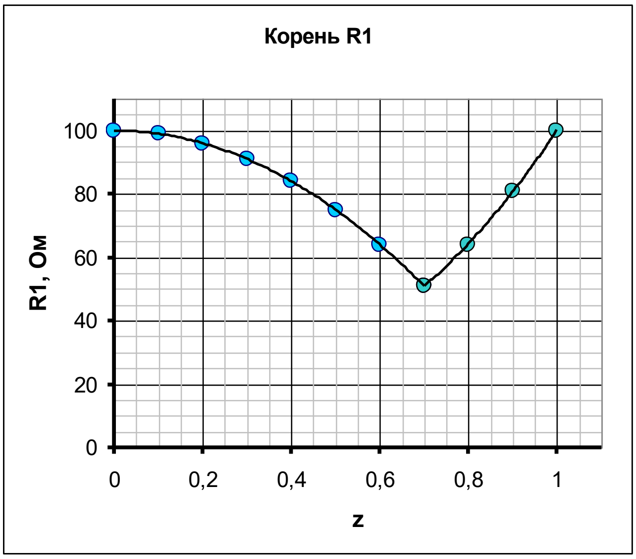
Полное решение этого уравнения задается выражениями:

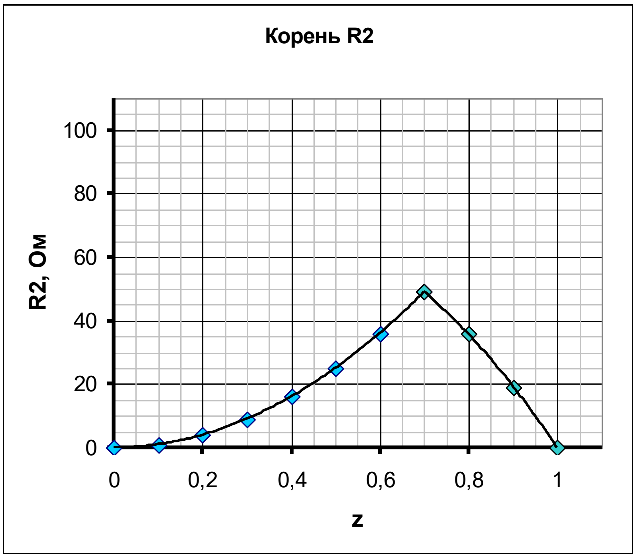
$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4r_{AB}}}{2} \\ r_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4r_{AB}}}{2} \end{cases}. \tag{17}$$

В Таблице приведены значения корней уравнения (8) в зависимости от параметра z (корни безразмерного уравнения (12) рассчитаны по формулам (13)).

z	R_{AB}, Ом	$r_{AB} = \dfrac{R_{AB}}{R_0}$	$R_1 = R_0 r_1$	$R_2 = R_0 r_2$
0,0	0,0	0,000	100,00	0,00
0,1	1,0	0,010	99,00	1,00
0,2	3,8	0,038	96,00	4,00
0,3	8,2	0,082	91,00	9,00
0,4	13,4	0,134	84,00	16,00
0,5	18,8	0,188	75,00	25,00
0,6	23,0	0,230	64,00	36,00
0,7	25,0	0,250	51,00	49,00
0,8	23,0	0,230	64,00	36,00
0,9	15,4	0,154	81,00	19,00
1,0	0,0	0,000	100,00	0,00

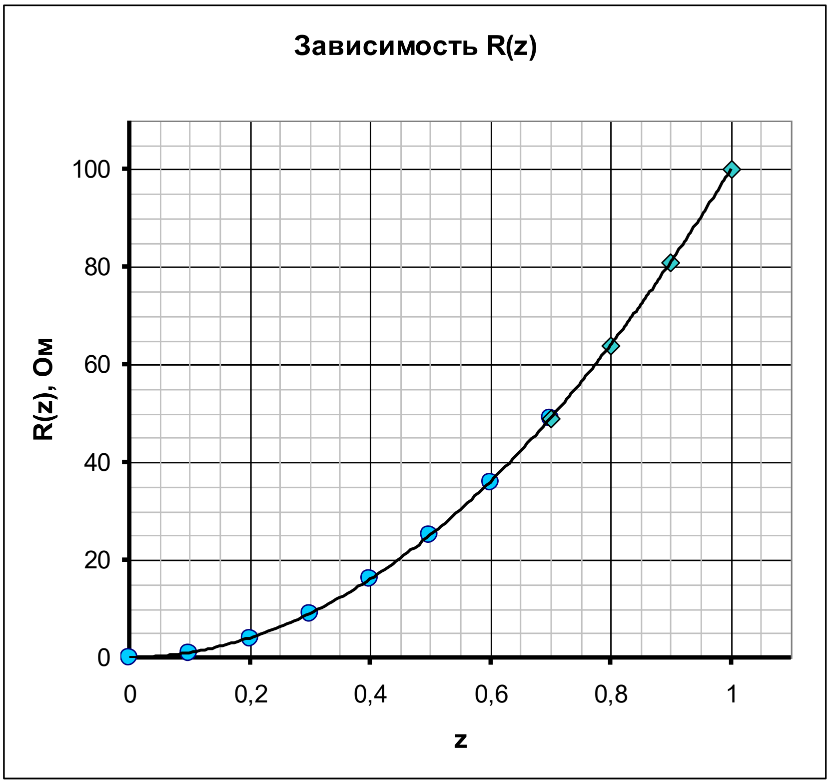
Ниже показаны графики этих рассчитанных значений.





По своему физическому смыслу полученная функция должна быть монотонно возрастающей, так сопротивление никакого участка реостата не может быть отрицательным. Поэтому, полученные решения надо правильно сшить, как показано в таблице и на графике.

z	$R(z)$, Ом
0,0	0,0
0,1	1,0
0,2	4,0
0,3	9,0
0,4	16,0
0,5	25,0
0,6	36,0
0,7	49,0
0,8	64,0
0,9	81,0
1,0	100,0



3.3 Легко заметить, что данная функция является квадратичной (значения сопротивлений – квадраты целых чисел) и описывается формулой

$$R(z) = R_0 z^2. \tag{18}$$

3.4 График зависимости мощности реостата от параметра z имеет вид, показанный на рисунке.