Республиканская физическая олимпиада 2023 года

(Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач
10 класс
(для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 1. Термоскоп Галилея. Решение.

Часть 1. Конструирование и градуировка в идеальном случае.

1.1 – 1.2 Масса воздуха в термоскопе остается постоянной, поэтому для этого воздуха справедливо уравнение состояния Клапейрона (для состояний при максимальной и минимальной температурах):

$$\frac{P_0(V_1+Sl)}{T_{\max}}=\frac{(P_0-\rho gl)V_1}{T_{\min}}, \qquad (1)$$

Где $Sl=\frac{\pi d^2}{4}l$ - внутренний объем трубки.

Из уравнения (1) находим:

$$\begin{gathered}\frac{(V_1+Sl)}{V_1}=\frac{(P_0-\rho gl)}{P_0}\frac{T_{\max}}{T_{\min}} \Rightarrow 1+\frac{Sl}{V_1}=(1-\alpha)\frac{T_{\max}}{T_{\min}} \Rightarrow \\ \frac{Sl}{V_1}=(1-\alpha)\frac{T_{\max}}{T_{\min}}-1 \Rightarrow V_1=\frac{Sl}{(1-\alpha)\frac{T_{\max}}{T_{\min}}-1}\end{gathered}. \qquad (2)$$

Численные расчеты приводят к результатам

$$\begin{gathered}Sl=\frac{\pi d^2}{4}l=\frac{\pi\cdot 0{,}5^2}{4}50=9{,}82\ см^3 \\ \alpha=\frac{\rho gl}{P_0}=\frac{1{,}0\cdot 10^3\cdot 10\cdot 0{,}50}{1{,}0\cdot 10^5}=5{,}0\cdot 10^{-3} \\ V_1=\frac{Sl}{(1-\alpha)\frac{T_{\max}}{T_{\min}}-1}=\frac{9{,}82 см^3}{(1-0{,}050)\frac{40+273}{10+273}-1}=194\ см^3 \\ \beta=\frac{Sl}{V_1+Sl}=0{,}048\end{gathered}. \qquad (3)$$

1.3 Запишем уравнение Клапейрона для воздуха в трубке, используя начальное и промежуточное состояния

$$\frac{P_0(V_1+Sl)}{T_{\max}}=\frac{(P_0-\rho gh)(V_1+Sl-Sh)}{T}. \qquad (4)$$

Перепишем его в «безразмерной» форме

$$\begin{gathered}\frac{T}{T_{\max}}=\left(1-\frac{\rho gl}{P_0}\cdot\frac{h}{l}\right)\left(1-\frac{Sl}{(V_1+Sl)}\cdot\frac{h}{l}\right) \Rightarrow \\ \frac{T}{T_{\max}}=(1-\alpha z)(1-\beta z)\end{gathered}. \qquad (5)$$

Это уравнение является квадратным относительно величины z:

$$\begin{gathered}az^2+bz+c=0 \\ a=\alpha\beta;\quad b=-(\alpha+\beta):\quad c=1-\frac{T}{T_{\max}}=1-\frac{t+273}{313},\end{gathered} \qquad (5)$$

которое может быть решено по известной формуле

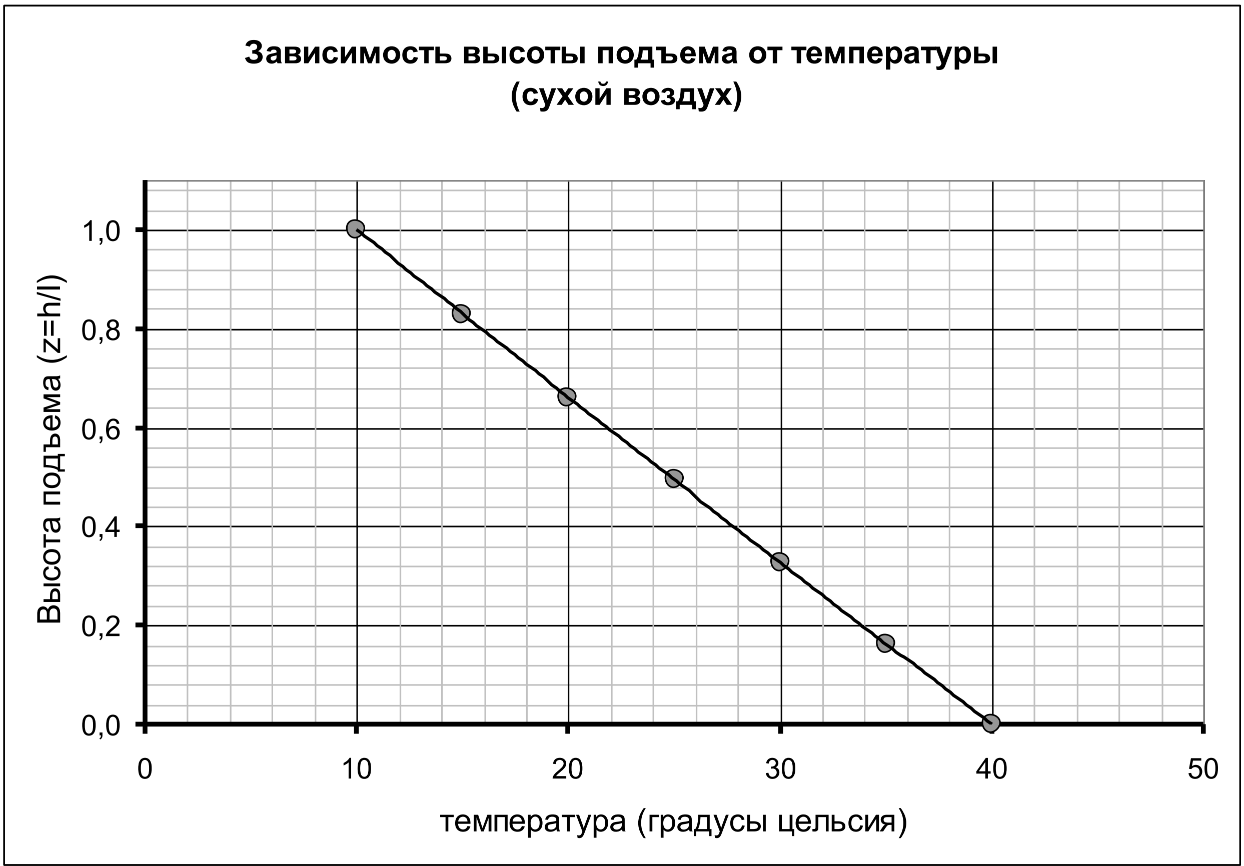
$$z = \frac{(\alpha+\beta) - \sqrt{(\alpha+\beta) + 4\alpha\beta\left(\frac{40-t}{313}\right)}}{2\alpha\beta}. \qquad (6)$$

Отметим, что необходимо выбрать знак «минус» перед корнем.

1.4 Результаты расчетов приведены в таблице 1 и на графике.

Таблица 1. Зависимость высоты подъема от температуры без учета влажности воздуха.

$t°C$	***a***	***b***	***c***	***z***
10,00	0,00241	-0,09826	0,09585	**1,000**
15,00	0,00241	-0,09826	0,07987	**0,830**
20,00	0,00241	-0,09826	0,06390	**0,661**
25,00	0,00241	-0,09826	0,04792	**0,494**
30,00	0,00241	-0,09826	0,03195	**0,328**
35,00	0,00241	-0,09826	0,01597	**0,163**
40,00	0,00241	-0,09826	0,00000	**0,000**



Замечания.

1. В данном случае можно рассчитать (что заметно проще) обратную зависимость $t(z)$ непосредственно по формуле (5).
2. Квадратное уравнение (5) можно решить приближенно, пренебрегая произведением $\alpha\beta$. В этом приближении получается практически та же зависимость.

Часть 2. Реальные измерения.

2.1 В этом случае суммарное давление газов в термостате равно сумме давлений сухого воздуха и давления водяного пара. Давление сухого воздуха подчиняется уравнению состояния, т.к. масса сухого воздуха остается неизменной. А давление водяного пара есть давление насыщенного водяного пара, зависящее только от температуры (и не зависящее от занимаемого объема). Поэтому при высоте уровня воды в сосуде h, связь между различными давлениями определяется уравнением равновесия столба воды

$$P_0 = P + P_{нас.} + \rho g h, \qquad (7)$$

Откуда следует, что давление сухого воздуха равно

$$P = P_0 - P_{нас.} - \rho g h, \qquad (8)$$

Уравнение Клапейрона для сухого воздуха в этом случае имеет вид:

$$\frac{\left(P_0 - P_{нас.}(t_{\max})\right)\cdot\left(V_1 + Sl\right)}{T_{\max}} = \frac{\left(P_0 - P_{нас.}(t) - \rho g h\right)\left(V_1 + Sl - Sh\right)}{T}. \qquad (9)$$

Или в безразмерных параметрах:

$$\frac{\left(1 - \dfrac{P_{нас.}(t_{\max})}{P_0}\right)}{T_{\max}} = \frac{\left(1 - \dfrac{P_{нас.}(t)}{P_0} - \dfrac{\rho g l}{P_0}\dfrac{h}{l}\right)\left(1 - \dfrac{Sl}{V_1 + Sl}\dfrac{h}{l}\right)}{T} \Rightarrow . \qquad (10)$$

$$(1 - \gamma_{\max})\frac{T}{T_{\max}} = (1 - \gamma - \alpha z)(1 - \beta z)$$

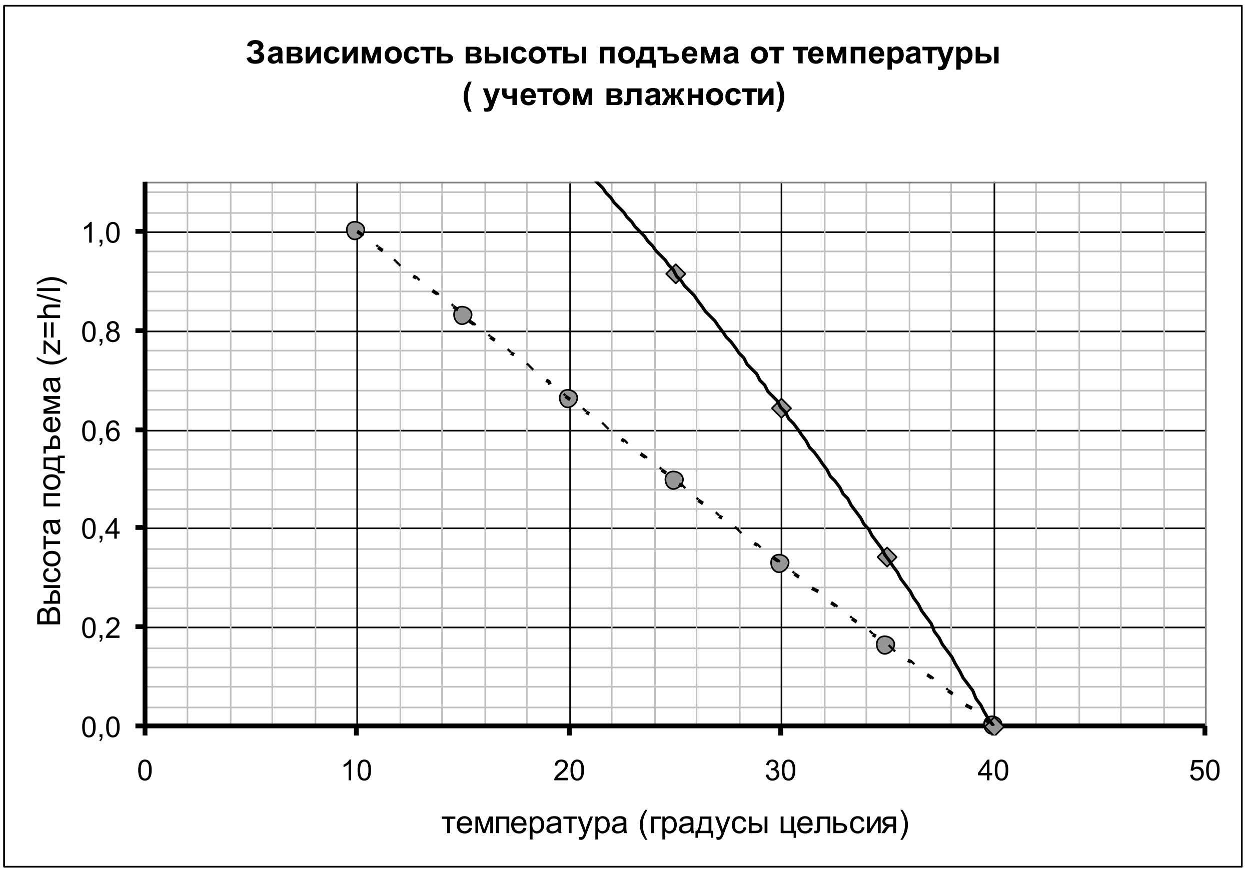
Это уравнение также приводится к квадратному уравнению типа (5) с параметрами

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a = \alpha\beta; \quad b = -\left(\alpha + \beta(1 - \gamma)\right): \quad c = (1 - \gamma) - (1 - \gamma_{\max})\frac{T}{T_{\max}}. \qquad (11)$$

Результаты расчетов всех параметров уравнения (11) и его решение представлены в Таблице 2.

$t°C$	$P, кПа$	γ	**a**	**b**	**c**	**z**
10,00	1,228	0,01228	0,00241	-0,09767	0,15030	**1,602**
15,00	1,706	0,01706	0,00241	-0,09744	0,13073	**1,390**
20,00	2,339	0,02339	0,00241	-0,09713	0,10961	**1,162**
25,00	3,169	0,03169	0,00241	-0,09673	0,08651	**0,915**
30,00	4,246	0,04246	0,00241	-0,09621	0,06095	**0,644**
35,00	5,627	0,05627	0,00241	-0,09554	0,03234	**0,341**
40,00	7,381	0,07381	0,00241	-0,09470	0,00000	**0,000**



Для наглядности на графике оставлена зависимость, рассчитанная без учета давления водяных паров. Естественно, что полученная зависимость имеет смысл только при $z \leq 1$.

Задание 2. Капельница Кельвина. Решение.

1. Если заряд сферы равен Q, то ее потенциал равен

$$\varphi = k\frac{Q}{R}, \qquad (1)$$

Где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Поэтому разность потенциалов между кольцами равна

$$\Delta\varphi = 2k\frac{Q}{R}. \qquad (2)$$

Тогда электрический заряд каждого кольца равен (из определения емкости конденсатора):

$$C = \frac{Q_1}{\Delta\varphi} \quad \Rightarrow \quad Q_1 = C\Delta\varphi = \frac{2kC}{R}Q. \qquad (3)$$

2. Так как верхний сосуд заземлен, то потенциал всех его точек (в том числе и капель) равен нулю. Потенциал капли равен сумме потенциалов поля, создаваемых зарядом на ближайшем кольце, и поля, создаваемого зарядом на самой капле. Потенциал поля кольца в точке нахождения капли легко определить, используя принцип суперпозиции:

$$\varphi_1 = k\frac{Q_1}{\sqrt{r^2+h^2}}. \qquad (4)$$

Такой же по модулю (но противоположный по знаку) потенциал создается зарядом на капле

$$\varphi_1 = k\frac{q}{a}. \qquad (5)$$

Приравнивая эти выражения, находим заряд капли

$$q = \frac{a}{\sqrt{r^2+h^2}}Q_1 = \frac{a}{\sqrt{r^2+h^2}}\frac{2kC}{R}Q. \qquad (6)$$

Из этой формулы следует, что безразмерный коэффициент пропорциональности между зарядом капли и зарядом сосуда равен

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{r^2+h^2}}\frac{2kC}{R}. \qquad (7)$$

3. Пусть после попадания $(N-1)$ капель заряд сосуда равен Q_{N-1}, тогда после падения очередной капли заряд сосуда станет равным

$$Q_N = Q_{N-1} + q = Q_{N-1} + \alpha Q_{N-1} = (1+\alpha)Q_{N-1}. \qquad (8)$$

Из этого выражения следует, что заряд сосуда возрастает в геометрической прогрессии, поэтому

$$Q_N = (1+\alpha)^N Q_0. \qquad (9)$$

Задание 3. Диск на рельсах. Решение.

Часть 1. Динамика вращательного движения.

1.1 Уравнение (1) можно получить различными способами. Например, рассмотрим малый промежуток времени Δt. Изменение кинетической энергии диска равно работе силы трения, поэтому

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{4}\right) = -2F_{тр.}v\Delta t\,. \tag{1}$$

Изменение кинетической энергии за малый промежуток времени преобразуем следующим образом

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{4}\right) = \frac{m}{4}\left((v+\Delta v)^2 - v^2\right) = \frac{m}{2}v\Delta v\,, \tag{2}$$

мы пренебрегли малым слагаемым $(\Delta v)^2$. Подстановка этого выражения в уравнение (1) приводит к требуемому результату

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -4\frac{F_{тр.}}{m}\,. \tag{3}$$

1.2 В рассматриваемом случае

$$F_{тр.} = \frac{1}{2}\mu mg \tag{4}$$

Поэтому

$$R\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -2\mu g\,. \tag{5}$$

Так как угловое ускорение постоянно, то угловая скорость изменяется по закону

$$\omega = \omega_0 - 2\frac{\mu g}{R}t\,. \tag{6}$$

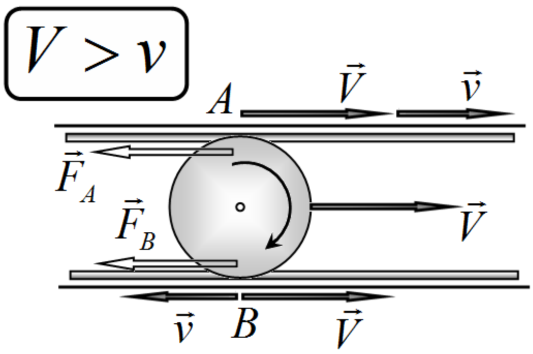
Из этой функции находим время, за которое угловая скорость уменьшается вдвое:

$$\frac{\omega_0}{2} = \omega_0 - 2\frac{\mu g}{R}t \quad\Rightarrow\quad t_{1/2} = \frac{\omega_0 R}{4\mu g}\,. \tag{7}$$

1.3 Полное число оборотов до остановки проще выразить из уравнения (1):

$$\frac{mR^2\omega_0^2}{4} = \mu mg\cdot(2\pi RN) \quad\Rightarrow\quad N = \frac{R\omega_0^2}{8\pi\mu g}\,. \tag{8}$$

Часть 2. Движение диска по рельсам.



2.1 Сила трения направлена в сторону противоположную относительной скорости точек соприкосновения тел. Поэтому направления сил трения, действующих на диск со стороны разных рельсов, зависят от соотношения между скоростями поступательного V и вращательного v движения крайних точек диска.
Если $V > v$, то эти крайние точки движутся в одну

сторону, поэтому обе силы трения направлены в сторону, противоположную вектору V. В этом случае скорость поступательного движения будет уменьшаться по закону

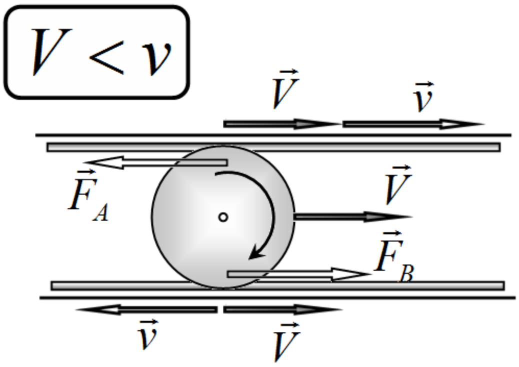
$$V = V_0 - a_1 t = V_0 - \mu g t, \tag{9}$$

Здесь обозначено $a_1 = \mu g$ - модуль ускорения для поступательного движения.

Так как силы трения направлены в одну сторону, то суммарный момент силы трения равен нулю, поэтому **угловая скорость вращения изменяться не будет**.

Иная ситуация реализуется при $V < v$.

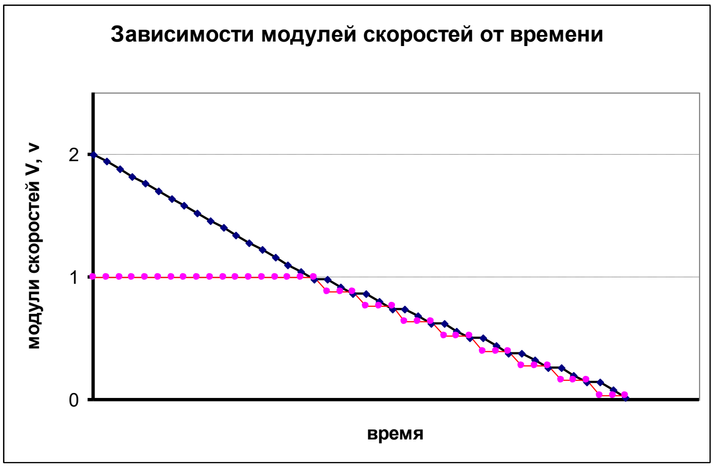
В этом случае силы трения, действующие на крайние точки диска, будут направлены в противоположные стороны. Тогда **скорость поступательного движения изменяться не будет,** а скорость вращательного движения будет изменяться в соответствии с формулой (6):



$$\omega = \omega_0 - 2\frac{\mu g}{R}t \quad \Rightarrow$$
$$v = \omega_0 R - a_2 t = \omega_0 R - 2\mu g t \tag{10}$$

Здесь $a_2 = 2\mu g$ - модуль ускорения вращательного движения. Движение с точным совпадением скоростей $V = v$ невозможно. Поэтому при $V \approx v$ движение диска будет носить более сложный характер: в какие малые промежутки времени при $V > v$ будет уменьшаться скорость поступательного движения (а вращательного сохраняться), в другие промежутки времени при $V < v$ будет сохраняться скорость поступательного движения, а скорость вращательного движения уменьшаться. Такое попеременное движение усреднено можно представить, как движение с некоторым средним ускорением.

На основании проведенных рассуждений графики зависимости скоростей от времени будет иметь вид: в течение некоторого промежутка времени t_1 скорость поступательного движения будет уменьшаться, а скорость вращательного движения оставаться неизменной, после того, как эти скорости выровняются, обе скорости будут уменьшаться с одинаковым средним значением.



2.2 Время выравнивания скоростей легко определить из закона изменения скорости поступательного движения (9):

$$\omega_0 R = V_0 - \mu g t_1 \quad \Rightarrow$$
$$t_1 = \frac{V_0 - \omega_0 R}{\mu g}, \tag{11}$$

2.3 Для расчета среднего ускорения при $V \approx v$ примем следующую модель: пусть скорость поступательного движения превышает скорость вращательного движения на малую величину ΔV, тогда эта скорость уменьшается с ускорением a_0 и достигает некоторого значения $v - \Delta v$ (на этом этапе скорость вращательного движения остается неизменной v) – длительность этого этапа

$$\tau_1 = \frac{\Delta V + \Delta v}{a_1}. \tag{12}$$

Скорость вращательного движения превысила скорость поступательного на величину Δv, поэтому она станет уменьшаться с ускорением a_1 и достигнет значения $V - \Delta V$, что произойдет за время

$$\tau_2 = \frac{\Delta v + \Delta V}{a_2}. \tag{13}$$

Таким образом, за время $(\tau_1 + \tau_2)$ обе скорости уменьшились на величину $(\Delta V + \Delta v)$. Поэтому средние ускорения оказываются одинаковыми и равными

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta V + \Delta v}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\Delta V + \Delta v}{\dfrac{\Delta v + \Delta V}{a_1} + \dfrac{\Delta v + \Delta V}{a_2}} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2}{3}\mu g. \tag{14}$$

2.4 Теперь путь, который пройдет диск до остановки, легко рассчитать по известной кинематической формуле

$$S = \frac{V_0^2 - \left(\dfrac{V_0}{2}\right)^2}{2\mu g} + \frac{\left(\dfrac{V_0}{2}\right)^2}{2 \cdot \dfrac{2}{3}\mu g} = \frac{9}{16}\frac{V_0^2}{\mu g}. \tag{15}$$