1. На доске записано натуральное число. Пете разрешено заменять имеющееся на доске число на сумму квадратов его цифр. Число назовем *интересным*, если из него за конечное число таких операций Петя не сможет получить единицу.

Докажите, что существует бесконечно много интересных натуральных чисел.

2. Целые числа a, b и c удовлетворяют равенству $a+b+c=0$. Обозначим $S=ab+bc+ca$, $A=a^2+a+1$, $B=b^2+b+1$ и $C=c^2+c+1$.

Докажите, что число $(S+A)(S+B)(S+C)$ является квадратом целого числа.

3. Внутри квадрата $ABCD$ отметили точку P, а на его сторонах AB, BC, CD и DA отметили точки K, L, M и N соответственно. Прямые KP, LP, MP и NP пересекают стороны CD, DA, AB и BC в точках K_1, L_1, M_1 и N_1 соответственно. Оказалось, что

$$\frac{KP}{PK_1}+\frac{LP}{PL_1}+\frac{MP}{PM_1}+\frac{NP}{PN_1}=4.$$

Докажите, что $KP+LP+MP+NP=K_1P+L_1P+M_1P+N_1P$.

4. Дана клетчатая доска размера 3×2021, все клетки которой покрашены в белый цвет. Два игрока по очереди перекрашивают в чёрный цвет две не обязательно соседние белые клетки, расположенные либо в одной строке, либо в одном столбце. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает.

Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш вне зависимости от игры соперника?