

LXXII Белорусская математическая олимпиада школьников

8 класс

1. Докажите, что для любого целого положительного n уравнения вида

$$x^2 - \text{НОД}(n, 7272) \cdot \text{НОК}(n, 7272) \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{7272} \right) x + 7272n = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что

$$\begin{aligned} n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}, \\ n &= b_1 + b_2 + \dots + b_{2022}, \end{aligned}$$

для некоторых натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ и $b_1, b_2, \dots, b_{2022}$, причем

$$\begin{aligned} a_1 &\geq a_2 \geq \dots \geq a_{2022}, \\ b_1 &\geq b_2 \geq \dots \geq b_{2022}, \\ a_1 &> b_1 \end{aligned}$$

и

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2022} = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{2022}.$$

3. В трапеции $ABCD$ длина основания BC в два раза больше длины основания AD . Точка N делит отрезок BC в отношении $3 : 1$, считая от точки B , а точка M – середина отрезка DN .

Найдите все возможные значения отношения $\frac{S_{ABND}}{S_{AMC}}$.

4. Дана квадратная таблица, в каждой клетке которой записано целое число. Влад и Никита играют в игру, делая ходы поочередно. Первым ходит Никита. За один ход он выбирает столбец таблицы и поэлементно прибавляет к нему или вычитает из него любой другой столбец таблицы. Влад за один ход проделывает аналогичную операцию, только со строками. Влад выиграет, если после очередного хода кого-либо из игроков в таблице окажется строка или столбец, состоящий из нулей.

Может ли Влад добиться победы независимо от игры Никиты? Если да, то как он должен играть, если исходная таблица имеет вид

а)

1	3
2	4

 ?

б)

7	3
2	6

 ?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа