LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

8 класс

1. Решите уравнение $4k! + 1 = (2n! + 1)^2$ в натуральных числах k и n.

Ответ: $k = 2$, $n = 1$ или $k = 3$, $n = 2$.

2. На клетчатую доску размера 8×8 выкладывают без наложений уголки вида , образованные тремя клетками (уголок можно поворачивать на угол, кратный 90°, границы уголков идут по линиям сетки).

Какое наименьшее количество уголков необходимо разместить на доске, чтобы больше ни одного уголка выложить было невозможно?

Ответ: 11.

3. В параллелограмме $ABCD$ угол ADC тупой. Из точки A опустили перпендикуляр AH на прямую CD, а из точки C опустили перпендикуляр CE на прямую AD. Прямые AH и CE пересекаются в точке K.

Докажите, что прямые HE и BK перпендикулярны.

4. Назовём разбиение множества чисел $1, 2, \ldots, 3n$ на тройки (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), $\ldots$, (a_n, b_n, c_n) *хорошим*, если справедливы равенства

$$a_1 = b_1 + 2c_1 - 1, \quad a_2 = b_2 + 2c_2 - 1, \quad \ldots, \quad a_n = b_n + 2c_n - 1.$$

Найдите все хорошие разбиения, считая разбиения, которые отличаются лишь порядком следования троек, одинаковыми.

Ответ: Существует единственное хорошее разбиение, состоящее из троек $(2n + k, 2n - k + 1, k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.