

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

10 класс

1. На координатной плоскости нарисован график функции $y = \frac{2}{x}$. В первой четверти координатной плоскости на нём отмечены точки A_1, A_2, \dots, A_{20} , а в третьей — C_1, C_2, \dots, C_{21} . Известно, что сумма абсцисс точек A_1, A_2, \dots, A_{20} равна модулю суммы ординат точек C_1, C_2, \dots, C_{21} , а сумма ординат точек A_1, A_2, \dots, A_{20} равна модулю суммы абсцисс точек C_1, C_2, \dots, C_{21} . Точка B имеет координаты $(-2; -2)$.

Найдите разность

$$(BA_1 + BA_2 + \dots + BA_{20}) - (BC_1 + BC_2 + \dots + BC_{21}).$$

2. Решите уравнение $8x^2 - 67 = 3^y - 2^z$ в натуральных числах x, y, z .

3. Саша и Влад играют в игру на координатной плоскости. Вначале Саша отмечает любые три целочисленные точки (т.е. точки, у которых обе координаты — целые числа). После этого ходит Влад. За ход Влад выбирает две из трёх имеющихся точек и поворачивает одну из них вокруг другой на 90° в произвольном направлении. Влад выигрывает, если ему удастся за несколько ходов добиться того, что какие-то две из трёх точек совпадут. Если же Влад не сможет этого сделать, то побеждает Саша.

Кто из мальчиков имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему выиграть независимо от действий другого?

4. Внутри равностороннего треугольника ABC отметили точку D так, что площадь треугольника ABC равна

$$\frac{\sqrt{3}}{8}(AD^2 + BD^2 + CD^2) + \frac{3}{4}AD \cdot BD.$$

Найдите угол ADB .

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов