Решения задач. 10 класс.

Задача 1. Привязанная тележка

Часть 1. «Высокий блок»

1.1 За малый промежуток времени Δt тележка сместится вправо по горизонтали на расстояние $u_1 \Delta t$. При этом длина нити уменьшится на величину $\upsilon \Delta t$. Из соответствующего прямоугольного треугольника получаем

$$\upsilon \Delta t = u_1 \Delta t \cos\alpha . \qquad (1)$$

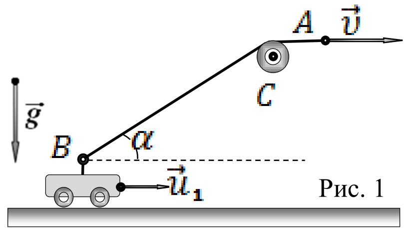


Рис. 1

Из (1) находим искомую зависимость

$$u_1(\alpha) = \frac{\upsilon}{\cos\alpha} . \qquad (2)$$

1.2 Используя (2), найдем искомые значения скоростей тележки на бесконечности и при $\alpha = 35°$.

Часть 2. «Подвижный блок»

2.1 Поскольку нить ABC нерастяжима, то длина ломаной ABC при движении тележки остаётся постоянной. Следовательно, уменьшение длины одного звена ломаной за некоторый промежуток времени должно равняться увеличению длины её второго звена.

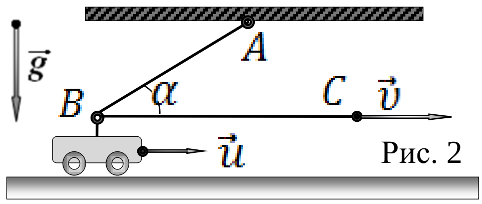


Рис. 2

Пусть за небольшой промежуток времени Δt тележка сместится вправо на расстояние $u\Delta t$. При этом длина участка AB нити уменьшится на величину (Рис. 2)

$$\Delta l_{AB} = u\Delta t \cos\alpha . \qquad (5)$$

С другой стороны, длина участка BC нити за этот же промежуток времени увеличится на Δl_{BC}

$$\Delta l_{BC} = (\upsilon - u)\Delta t . \qquad (6)$$

Приравнивая (5) и (6) по условию не растяжимости нити, получим

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{BC} \quad \Rightarrow \quad u\Delta t \cos\alpha = (\upsilon - u)\Delta t . \qquad (7)$$

Из (7) находим искомую зависимость $u_4(\alpha)$

$$u_4(\alpha) = \frac{\upsilon}{1 + \cos\alpha} . \qquad (8)$$

2.2 Используя (8), найдем искомые значения скоростей тележки на бесконечности и при $\alpha = 35°$

$$u_5 = u_4(\alpha = 0°) = \frac{\upsilon}{1 + \cos 0°} = \frac{\upsilon}{2} = 0{,}75\ \frac{\text{м}}{\text{с}} , \qquad (9)$$

$$u_6 = u_4(\alpha = 35°) = \frac{\upsilon}{1 + \cos 35°} = 0{,}82\ \frac{\text{м}}{\text{с}} . \qquad (10)$$

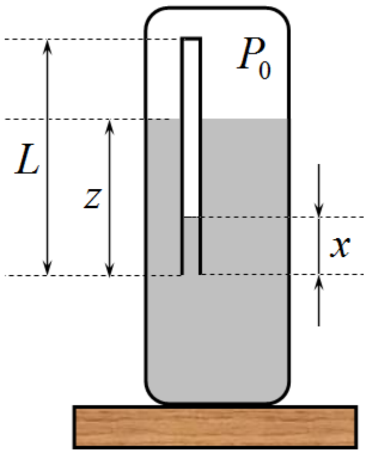
Заметим, что полученное значение (9) можно было найти и без использования (8), поскольку u_5 соответствует случаю подвижного блока, на котором «проигрывают» в скорости в два раза.

Часть 3. «Низкий блок»

3.1 Данная часть задачи самая простая, поскольку при такой схеме вытяжки тележки её скорость независимо от угла α всегда будет равна по модулю скорости нити.

Задача 2. Картезианский водолаз.

Часть 1. Вынужденное погружение.



1.1 Так как температура воздуха в трубке и его масса не изменяются, то для этого воздуха справедлив закон Бойля-Мариотта:

$$P_0 L = P(L - x) \quad (1)$$

С другой стороны, давление воздуха в трубке можно выразить через гидростатическое давление воды:

$$P = P_0 + z - x \quad (2)$$

Здесь, как сказано в условии давления воздуха измеряется в метрах водяного столба.

В этих уравнениях две неизвестные величины: давление воздуха в трубке P и высота x, поэтому эта система может быть решена:

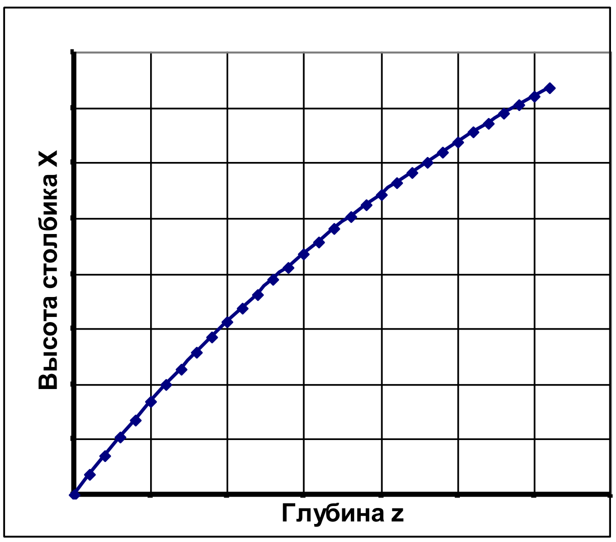
$$\begin{aligned} &P_0 L = (P_0 + z - x)(L - x) \quad \Rightarrow \\ &x^2 - (P_0 + z)x - Lx + (P_0 + z)L - P_0 L = 0 \quad \Rightarrow \\ &x^2 - (P_0 + z + L)x + zL = 0 \quad \Rightarrow \\ &x_{1,2} = \frac{(P_0 + z + L)}{2} \pm \sqrt{\frac{(P_0 + z + L)^2}{4} - zL} \end{aligned} \quad (3)$$

Из двух корней следует выбрать корень со знаком минус. В качестве обоснования такого выбора можно привести следующий: при $z = 0$ высота x также должна равняться нулю.

Поэтому окончательно получим

$$x(z) = \frac{(P_0 + z + L)}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + z + L)^2}{4} - zL}. \quad (4)$$

Схематический график этой зависимости показан на рисунке: при увеличении z, величина x монотонно стремится к L.



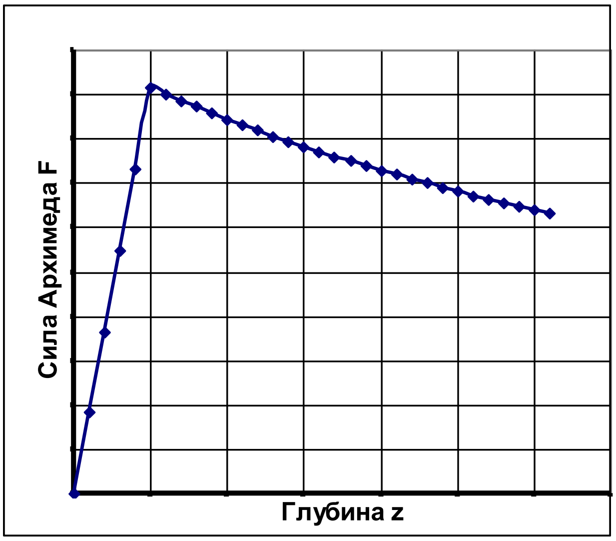
1.2 Силу Архимеда можно выразить по известной формуле, как вес вытесненной воды. Однако, необходимо рассмотреть два случая:
А) Глубина погружения меньше длины пробирки $z < L$. В этом случае

$$F_A = \rho g s(z - x) \qquad (5)$$

Так как x растет медленнее, чем z, то в этом случае сила Архимеда возрастает при увеличении z.
Б) Глубина погружения больше длины пробирки $z > L$. В этом случае

$$F_A = \rho g s(L - x). \qquad (6)$$

В этом случае сила Архимеда с ростом z убывает.
Схематический график этой зависимости показан на следующем рисунке.



1.3 Таким образом, сила Архимеда принимает максимальное значение при $z = L$.
Как следует из формулы (4), при этом величина x будет равна

$$x(z) = \frac{(P_0 + 2L)}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + 2L)^2}{4} - L^2} = \frac{(P_0 + 2L)}{2} - \sqrt{\frac{P_0^{\,2} + 4P_0 L}{4}},$$

а максимальное значение силы Архимеда:

$$F_{A\max} = \rho g s(L - x) = \rho g s\left(L - \frac{(P_0 + 2L)}{2} + \sqrt{\frac{P_0^{\,2} + 4P_0 L}{4}}\right) = \\ = \rho g s\left(\sqrt{\frac{P_0^{\,2} + 4P_0 L}{4}} - \frac{P_0}{2}\right) \qquad (7)$$

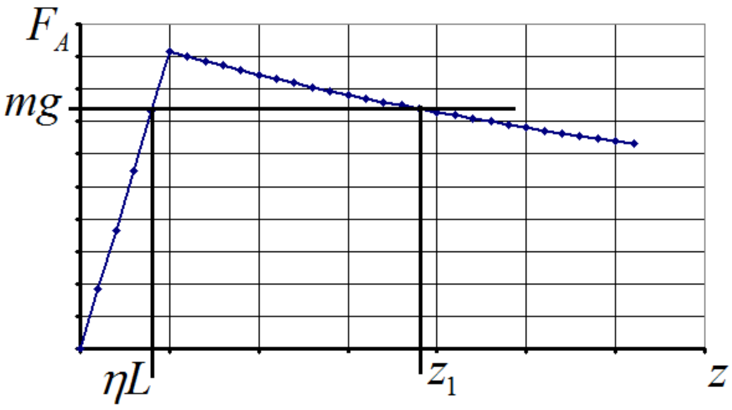
Заметим, что при $P_0 >> L$ это максимальное значение стремится к L. Действительно в этом приближении изменение давление воздуха в трубке при погружении пренебрежимо мало, поэтому можно считать, что воздух занимает всю трубку.

1.4 Силу Архимеда можно выразить как разность сил давлений на закрытый верхний торец трубки, поэтому

$$F_A = (P - (P_0 + \rho g(z - L))s, \qquad (8)$$

что, конечно, равносильно использованному ранее подходу.

1.5 На графике зависимости силы Архимеда от глубины погружения отметим уровень силы тяжести. Для этого проведем вертикальную линию $z = \eta L$ до пересечения с графиком зависимости силы Архимеда от глубины. В точке пересечения эта сила будет равна силе тяжести. Дале проведем горизонтальную линию на уровне силы тяжести до пересечения со второй ветвью графика. Абсцисса этой точки и будет искомая глубина z_1.



Легко показать, что положение равновесия в точке z_1 является неустойчивым, поэтому, если глубина погружения станет чуть больше, чем z_1, трубка утонет. Таким образом, для расчета этой глубины необходимо решить следующее уравнение

$$F_A(\eta L) = F_A(z_1). \tag{9}$$

Используя полученные формулы для силы Архимеда, получим требуемое уравнение:

$$(z - x)_0 = (L - x(z_1)) \quad \Rightarrow$$
$$h_0 = L - \frac{(P_0 + z + L)}{2} + \sqrt{\frac{(P_0 + z + L)^2}{4} - zL} \tag{10}$$

где обозначено

$$h_0 = (z - x)_0 = \eta L - \frac{(P_0 + \eta L + L)}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + \eta L + L)^2}{4} - \eta L^2} \tag{11}$$

Высота столбика воздуха в трубке, когда она плавает на поверхности.

Данной уравнение очень громоздко. Одна при данных заданных в условии величина $L << P_0$. Так $P_0 = 10 м$, а $L = 0{,}10 м$. Поэтому можно пренебречь изменение давления на высоте трубки. В этом случае $h_0 \approx L$ - при погружении трубки на ее высоту объем воздуха в ней остается неизменным. В положении равновесия сила Архимеда, а следовательно, и сила тяжести трубки равны $mg = \rho g s \eta L$. При погружении на глубину z давление в трубке становится равным $(P_0 + z)$, поэтому высота столба воздуха в трубке оказывается равной

$$P_0 L = (P_0 + z)h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{P_0 L}{(P_0 + z)} \tag{12}$$

При этом сила Архимеда должна стать равной силе тяжести

$$\rho g s h = \rho g s \eta L \quad \Rightarrow \quad \frac{P_0 L}{(P_0 + z)} = \eta L\,. \tag{13}$$

Из этого уравнения элементарно находим

$$z = \frac{1 - \eta}{\eta} P_0 = 2{,}5 м\,. \tag{14}$$

<u>**Часть 2**</u> данной задачи решается аналогично, только в записанных уравнениях следует рассматривать зависимость параметров не от z, а от давления воздуха в сосуде P_1.

<u>Часть 3 Конструкторская</u>, предоставляет богатые возможности для творчества. Однако основными идеями являются: помещение трубки в закрытый сосуд, и предварительное наполнении трубки водой, так чтобы она плавала «на грани» - при незначительном изменении объема сосуда (а, следовательно, и объема воздуха в трубке) трубка начинала тонуть.

Задача 3. Амперметр, вольтметр, омметр и пр.

<u>Часть 1. Приборы магнитоэлектрической системы.</u>

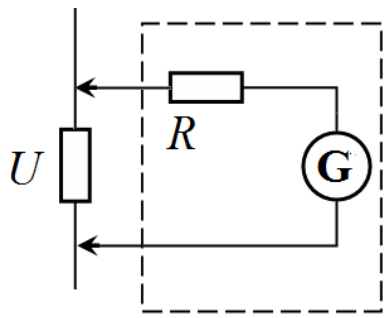
1.1 При пропускании тока через рамку на нее будут действовать моменты сил со стороны магнитного поля и со стороны пружины, в результаты рамка перейдет в новое положение равновесия, которое определяется уравнением

$$IBS\sin(\varphi_0+\delta)=k\delta. \tag{1}$$

где δ - угол отклонения стрелки от «нулевого» положения. Из уравнения (1) следует, что для «линейности» прибора необходимо, чтобы момент со стороны магнитного поля слабо зависел от поворота рамки. Это достигается при $\varphi_0=90°$, в этом случае $\sin(\varphi_0+\delta)=\cos\delta\approx 1$. Иными словами, в положении равновесия нормаль к рамке должна быть перпендикулярна линиям магнитного поля, или магнитные линии должны лежать в плоскости рамки. Кроме того, при такой ориентации момент силы со стороны магнитного поля максимален, что повышает чувствительность гальванометра.

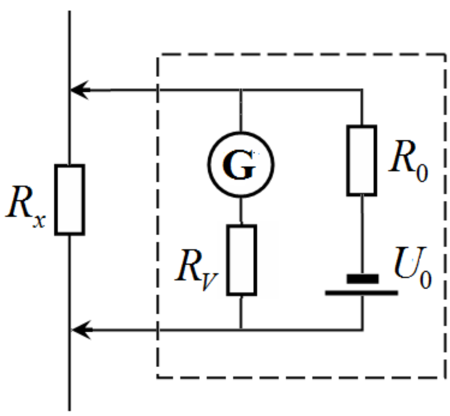
1.2 Чтобы «превратить» гальванометр в вольтметр, к необходимо последовательно подключить дополнительный резистор большого сопротивления R (значительно превышающего сопротивление элемента, на котором производится измерение напряжения). В этом случае сила тока через гальванометр будет равна

$$I=\frac{U}{R}. \tag{2}$$



Следовательно, диапазон измеряемых напряжений будет лежать в интервале $[RI_{\min}, RI_{\max}]$. Данная схема работает строго в линейном режиме.

1.3 Так как гальванометр измеряет силу тока, то омметр должен содержать источник тока. При протекании тока через измеряемый резистор, напряжение на нем пропорционально его сопротивлению. Поэтому желательно, чтобы сила тока в цепи этого резистора не зависела от его сопротивления. Для этого следует источник с большим внутренним сопротивлением (источник тока). Можно просто добавить резистор с большим сопротивлением в измерительную цепь. Далее следует измерять напряжение на измеряемом резисторе, то есть использовать разработанную схему вольтметра. Таким образом, «вырисовывается» следующая схема омметра и его подключения к измеряемому резистору.



В этой схеме: R_0 - сопротивление в цепи источника тока, R_V - сопротивление в цепи вольтметра; R_x измеряемое напряжение. Между этими сопротивлениями должно выполняться соотношение: $R_0 >> R_V >> R_x$. При выполнении этих условий сила тока через резистор будет равна:

$$I_G = \left(\frac{U_0}{R_0} R_x\right)\frac{1}{R_V} = \left(\frac{U_0}{R_0 R_V}\right) \cdot R_x \tag{3}$$

и пропорциональна измеряемому сопротивлению.

Часть 2. Электростатический вольтметр.

2.1 Пластины электродов в области их перекрытия можно рассматривать как конденсатор, емкость которого зависит от смещения подвижной пластины:

$$C = \frac{\varepsilon_0 l(x + x_0)}{d}. \tag{4}$$

При проведении измерений этот конденсатор фактически подключается к источнику постоянного напряжения U. Поэтому энергия этого конденсатора равна

$$W_C = \frac{CU^2}{2}. \tag{5}$$

При втягивании подвижного электрода емкость конденсатора увеличивается, поэтому увеличивается и его энергия. Это приводит к определенному парадоксу: пластина должна не втягиваться, а выталкиваться из зазора неподвижного электрода!?

Однако, никакого парадокса нет: дело в том, что конденсатор не является замкнутой системой, он подключен к источнику напряжения. При увеличении емкости увеличивается заряд конденсатора, следовательно, источник совершает работу по зарядке конденсатора, поэтому его энергия уменьшается. Изменение энергии источника рассчитывается следующим образом:

$$W_U = -A = -qU = -CU^2. \tag{6}$$

Полная энергия системы равна

$$W = W_C + W_U = -\frac{CU^2}{2}. \tag{7}$$

Таким образом, при втягивании подвижной пластины суммарная энергия уменьшается, следовательно, на пластину действует сила, направленная к неподвижному электроду и равная

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{U^2}{2}\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\varepsilon_0 l}{2d} U^2. \tag{7}$$

2.2 В положении равновесия эта сила компенсируется силой упругости пружины:

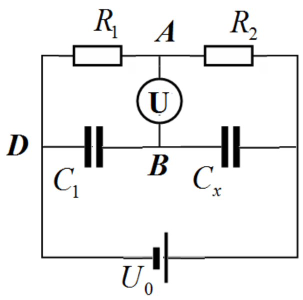
$$\frac{\varepsilon_0 l}{2d} U^2 = kx. \tag{8}$$

Тогда смещение пластины

$$x = \frac{\varepsilon_0 l}{2dk} U^2. \tag{9}$$

2.3 Зависимость смещения от напряжения нелинейная, для ее линеаризации можно попытаться заменить прямоугольные пластины на пластину более «хитрой» формы. Для этого необходимо добиться выполнения условия $\frac{dS}{dx} = \gamma\sqrt{x}$. Такая геометрическая задача может быть решена.

Часть 3. «Фарадометр»



3.1 Если в цепи подключен вольтметр магнитоэлектрической системы, то его показания будут равны нулю. Так как после зарядки конденсаторов ток через вольтметр прекратится.

3.2 Так как ток через электростатический вольтметр не течет, то верхнюю (с резисторами) и нижнюю (с конденсаторами) ветви моста можно рассматривать независимо.
Примем потенциал точки D равным нулю. Тогда потенциал точки A будет равен

$$\varphi_A = IR_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{10}$$

Потенциал точки B равен напряжению на конденсаторе C_1. Это напряжение можно найти, рассматривая два последовательно соединенных резистора:

$$\begin{cases} C_1U_1 = C_2U_2 \\ U_1 + U_x = U_0 \end{cases} \Rightarrow \quad U_1 = U_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}. \tag{11}$$

Показания вольтметра:

$$U_V = U_0\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right) \tag{12}$$

3.3 Мост будет сбалансирован при выполнении «симметричного» условия:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{C_2}{C_1}. \tag{13}$$