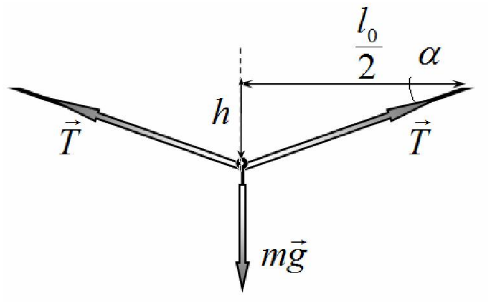
Решения задач. 10 класс

Задача 10-1. Упругий жгут

Часть 1. Провисание шнура

1.1 На рисунке показаны силы, действующие на точку крепления груза. Сила натяжения жгута обозначена $\vec{T}$. Условие равновесия в проекции на вертикальную ось выражается уравнением



$$mg = 2T\sin\alpha. \qquad (1)$$

Силу упругости жгута также можно выразить из закона Гука

$$T = kx = k\left(\frac{l_0}{2\cos\alpha} - \frac{l_0}{2}\right) = \frac{kl_0}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \qquad (2)$$

Из этих выражений получаем уравнение для определения угла α:

$$mg = 2\frac{kl_0}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha = \frac{mg}{kl_0}. \qquad (3)$$

Это уравнение может быть сведено к алгебраическому уравнению степени, большей, чем два. Поэтому для его решения проще воспользоваться приближением малых углов. В этом приближении (с учетом формул, приведенных в условии задачи) левую часть уравнения преобразуем к виду:

$$\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha \approx \frac{1-\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)}{1-\frac{\alpha^2}{2}}\alpha \approx \frac{\alpha^3}{2}$$

Тогда из уравнения (3) следует, что угол отклонения жгута от горизонтали задается формулой

$$\alpha = \sqrt[3]{2\frac{mg}{kl_0}} \qquad (4)$$

А провисание жгута оказывается равным

$$\boxed{h = \frac{l_0}{2}\operatorname{tg}\alpha \approx \frac{l_0}{2}\alpha = \frac{l_0}{2}\sqrt[3]{2\frac{mg}{kl_0}}}. \qquad (5)$$

1.2 Жгут разорвется, если сила его натяжения станет T (формула (1)) равной максимальной силе F_{max}. В формулах (1)-(2) воспользуемся приближением малых углов и решим полученную систему уравнений относительно массы груза, а затем вместо произвольной силы натяжения подставим ее предельное значение:

$$\begin{cases} mg = 2T\sin\alpha \\ T = \frac{kl_0}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg = 2T\alpha \\ T = \frac{kl_0}{2}\frac{\alpha^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (mg)^2 = 4T^2\alpha^2 \\ T = \frac{kl_0}{2}\frac{\alpha^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{(mg)^2}{T} = \frac{16T^2}{kl_0}$$

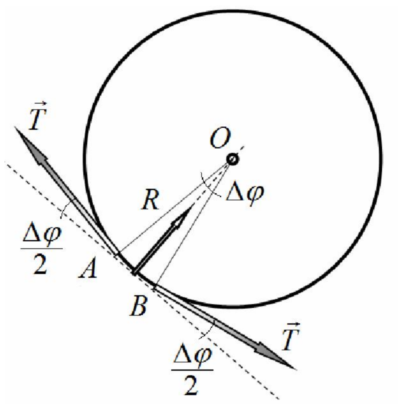
Откуда следует окончательный результат:

$$\boxed{m_{max} = \frac{4}{g}\sqrt{\frac{F_{max}^3}{kl_0}}} \qquad (6)$$

Часть 2. Вращающийся жгут

2.1 Выделим мысленно на кольце небольшой участок AB, видимый из центра кольца O под малым углом $\Delta\varphi$. Он движется по окружности с центростремительным ускорением

$$a = \omega^2 R. \quad (7)$$



Это ускорение ему сообщают силы упругости кольца T, приложенные к концам выделенного участка.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для выделенного участка кольца в проекции на радиальное направление (с учетом малости угла $\Delta\varphi$)

$$\Delta m \omega^2 R = 2T \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (8)$$

Здесь $\Delta m = \frac{m_0}{2\pi}\Delta\varphi$ - масса выделенного участка. Заметим, что это выражение для массы не зависит от того, растянуто кольцо, или нет.

Подставляя это выражение для массы участка, получим выражение для силы натяжения кольца

$$T = \frac{m_0}{2\pi}\omega^2 R. \quad (9)$$

Это выражение не является окончательным ответом, так как в нем остается неизвестным радиус кольца, который увеличивается по мере раскручивания. Поэтому запишем формулу для силы натяжения, используя закон Гука:

$$T = k\left(2\pi R - l_0\right) \quad (10)$$

Решая совместно уравнения (9)-(10) относительно силы натяжения T, получим следующую формулу:

$$\boxed{T = \frac{k l_0}{\frac{4\pi^2 k}{m_0 \omega^2} - 1}} \quad (11)$$

Эта формула справедлива только при $\frac{4\pi^2 k}{m_0\omega^2} - 1 > 0$, или при

$$\tilde{\omega}_1 < 2\pi\sqrt{\frac{k}{m_0}} \quad (12)$$

При больших угловых скоростях кольцо начнет расширяться вплоть до разрыва, так как силы упругости не в состоянии обеспечить нужное центростремительное ускорение всем частям кольца.

2.2 Итак, первое условие разрыва кольца – нарушение неравенства (12).

Считая, что неравенство (12) выполняется, а сила упругости, определяемая формулой (11) достигла максимального значения F_{max}, выразим из (12) угловую скорость, при которой достигается эта сила натяжения:

$$\boxed{F_{max} = \frac{k l_0}{\frac{4\pi^2 k}{m_0\omega^2} - 1} \Rightarrow \tilde{\omega}_2 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m_0\left(1 + \frac{k l_0}{F_{max}}\right)}}} \quad (13)$$

Заметим, что угловая скорость, определяемая по формуле (13) всегда меньше, скорости, задаваемой формулой (12). Поэтому окончательным ответом на поставленный вопрос является формула (13).

2.3 Переход к нерастяжимому жгуту может быть формально проведен с помощью формулы (13), если считать, что $k \Rightarrow \infty$. В этом пределе максимальная угловая скорость угловая скорость описывается формулой

$$\tilde{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{F_{max}}{m_0 l_0}} \qquad (14)$$

Впрочем, этот же результат непосредственно следует из уравнения (9), если положить, что длина окружности кольца равна длине жгута.

Задача 10-2 Термодинамика в химии.

Часть 1. Введение

1.1 Так как сосуды теплоизолированные, и при смешивании газов работа не совершается, то внутренняя энергия газов сохраняется, что позволяет записать следующее балансное уравнение

$$c_1\nu_1 T_1 + c_2\nu_2 T_2 = (c_1\nu_1 + c_2\nu_2)\overline{T} \qquad (1)$$

Используя уравнение состояния идеального газа

$$PV = \nu RT\ , \qquad (2)$$

можно выразить

$$\nu T = \frac{PV}{R} \text{ и } \nu = \frac{PV}{RT}. \qquad (3)$$

Подставим в уравнение значения теплоемкостей газов и выражения (3), в результате получим

$$\frac{3}{2}P_1V + \frac{5}{3}P_2V = \left(\frac{3}{2}\frac{P_1V}{T_1} + \frac{2}{2}\frac{P_2V}{T_2}\right)\overline{T}\ . \qquad (4)$$

Из этого уравнения находим значение установившейся температуры:

$$\boxed{\overline{T} = \frac{3P_1 + 5P_2}{\dfrac{3P_1}{T_1} + \dfrac{5P_2}{T_2}}}\ . \qquad (5)$$

1.2 Суммарная теплоемкость смеси газов равна

$$C = \frac{3}{2}R\nu_1 + \frac{5}{2}R\nu_2 = \frac{3}{2}\frac{P_1V}{T_1} + \frac{3}{2}\frac{P_2V}{T_2}\ . \qquad (6)$$

Поэтому изменение температуры смеси при получении дополнительного количества теплоты равно

$$\Delta T = \frac{Q}{C} \qquad (7)$$

Изменение давления можно связать с изменением температуры с помощью уравнения изохорного процесса

$$\frac{P + \Delta P}{T + \Delta T} = \frac{P}{T}\ . \qquad (8)$$

При малом количестве полученной теплоты изменения температуры и давления также могут быть малыми. Поэтому уравнение (8) можно упростить

$$\frac{P+\Delta P}{T+\Delta T}=\frac{P}{T}\frac{1+\frac{\Delta P}{P}}{1+\frac{\Delta T}{T}}\approx\frac{P}{T}\left(1+\frac{\Delta P}{P}-\frac{\Delta T}{T}\right). \qquad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует, что на малом участке изохорного процесса выполняется соотношение

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{\Delta T}{T} \qquad (10)$$

Поэтому относительное изменение давления оказывается равным

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{\Delta T}{T}=\frac{Q}{\frac{3}{2}\frac{P_1V}{T_1}+\frac{3}{2}\frac{P_2V}{T_2}}\frac{\frac{3P_1}{T_1}+\frac{5P_2}{T_2}}{3P_1+5P_2}=\frac{2Q}{(3P_1+5P_2)V} \qquad (11)$$

Часть 2. Диссоциация газа

2.1 В рассматриваемом случае вся поступившая теплота пошла на увеличение внутренней энергии газа, поэтому

$$\frac{5}{2}R\Delta T_0=Q \quad\Rightarrow\quad \Delta T_0=\frac{2Q}{5R}. \qquad (12)$$

Пусть температура газа увеличилась на величину ΔT. Тогда в образовавшейся смеси образовалось

$$\nu_1=2\eta\nu_0=2\alpha\Delta T \qquad (13)$$

молей одноатомных молекул (напомним, $\nu_0=1$); и осталось

$$\nu_2=(1-\eta)\nu_0=1-\alpha\Delta T \qquad (14)$$

двухатомных молекул.

Для получения уравнение энергетического баланса в этом процессе должно включать следующие слагаемые (для наглядности мы его представим в виде бухгалтерской таблицы):

Приход		Расход		Преобразования
Начальная внутренняя энергия газа	$\frac{5}{2}RT_0$			
Количество поступившей теплоты	Q			
		Внутренняя энергия смеси после нагревания	$\frac{3}{2}R\cdot 2\alpha\Delta T(T_0+\Delta T)+$ $+\frac{5}{2}R(1-\alpha\Delta T)(T_0+\Delta T)$	$\approx 3R\alpha T_0\Delta T+$ $+\frac{5}{2}R(T_0+\Delta T+\alpha T_0\Delta T)$ $=\frac{5}{2}RT_0+\frac{5}{2}R\Delta T+\frac{11}{2}R\alpha T_0\Delta T$
		расход энергии на диссоциацию	$q\alpha\Delta T$	

При проведении преобразований мы пренебрегли величинами пропорциональными $(\Delta T)^2$ ввиду малости изменения температуры. Таким образом, уравнение энергетического баланса имеет вид

$$\frac{5}{2}RT_0 + Q = \frac{5}{2}RT_0 + \frac{5}{2}R\Delta T + \frac{11}{2}R\alpha T_0\Delta T + q\alpha\Delta T\ . \qquad (15)$$

Из этого уравнения находим

$$\Delta T = \frac{2Q}{5R + R\alpha T_0 + q\alpha}\ . \qquad (16)$$

2.3 Полученное значение оказывается меньше, чем рассчитанное без учета диссоциации. Это уменьшение разности температур обусловлено двумя причинами:
- часть энергии израсходовано на диссоциацию молекул;
- теплоемкость образовавшейся смеси больше, чем теплоемкость исходного газа.

Часть 3. Горение водорода.

3.1 В описанной реакции горения принимают участие 2 моля водорода и 1 моль кислорода. Так как, в сосуде изначально имеется только один моль водорода, то в реакцию вступит только 0,5 моля кислорода. Следовательно. после завершения реакции в сосуде будет содержаться один моль водяного пара и 0,5 моля кислорода.

Уравнение энергетического баланса в этом случае практически очевидно:

$$2\cdot\frac{5}{2}RT_0 + \frac{1}{2}q = \frac{6}{2}RT + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}RT\ . \qquad (17)$$

Из этого уравнения следует, что в сосуде установится температура

$$T = \frac{20RT_0 + 2q}{17R}\ . \qquad (18)$$

3.2 Из полученной формулы следует, что даже при $q = 0$ температура в ходе реакции повышается. Причиной этого является уменьшение теплоемкости газов в ходе реакции.

Задание 10-3. Подводный телеграфный кабель.

1. Введение.

1.1 Сопротивление центральной медной жилы рассчитывается по известной формуле

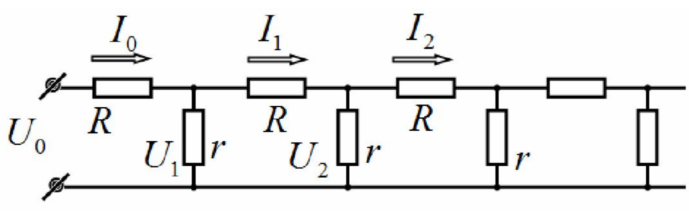
$$R = \rho_0\frac{L}{S} = \rho_0\frac{4L}{\pi d^2} = 0{,}87\,\text{Ом}\ . \qquad (1)$$

1.2 Для расчета сопротивления изоляции необходимо учесть, что ток идет поперек изоляционного слоя, поэтому это сопротивление равно

$$r = \rho_1\frac{h}{2\pi dL} = 6{,}7\cdot10^6\,\text{Ом}\ . \qquad (2)$$

2. Уменьшение силы тока в кабеле и его утечка.

2.1 По определению электрического напряжения, для каждой ячейки, состоящей из двух резисторов r и



одного резистора R напряжение может быть представлено в виде

$$U_k = I_k R + U_{k+1} \tag{3}$$

Из этой формулы следует, что

$$I_k = \frac{U_k - U_{k+1}}{R} \tag{4}$$

2.2 Рассматривая силы токов, входящих в каждый верхний узел цепи, можно записать

$$I_{k-1} = I_k + \frac{U_k}{r}. \tag{5}$$

здесь $\frac{U_k}{r}$ - сила тока утечки в данном звене.

Если подставить выражения для сил токов (4) в формулу (5), то получим искомое соотношение между напряжениями

$$\frac{U_{k-1} - U_k}{R} = \frac{U_k}{r} + \frac{U_k - U_{k+1}}{R}. \tag{6}$$

Его удобно представить в виде

$$U_{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right) U_k + U_{k+1} = 0. \tag{7}$$

2.3 Для проверки предположения о геометрической прогрессии, подставим явные выражения для напряжений $U_k = U_0 \lambda^k$ в формулу (7):

$$U_0 \lambda^{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right) U_0 \lambda^k + U_0 \lambda^{k+1} = 0. \tag{8}$$

После сокращения, получим квадратное уравнение для знаменателя прогрессии

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{R}{r}\right)\lambda + 1 = 0. \tag{9}$$

Таким образом, предположение о геометрической прогрессии выполняется, если ее знаменатель λ удовлетворяет уравнению (9). Решением этого уравнения являются числа

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{R}{2r} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} \tag{10}$$

Из двух корней этого уравнения следует выбрать корень со знаком «минус», так как второй корень оказывается больше 1. В этом случае напряжения и, следовательно, силы токов должны возрастать до бесконечности, что физически не возможно.

Аккуратное вычисление параметра λ приводит к значению $\lambda = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$.

Обратите внимание на интересную «игру» малых величин: отношение сопротивлений, входящих в формулу (10) величина порядка 10^{-8}, найденный по этой формуле корень отличается от единицы на величину порядка 10^{-8}. При умении правильно работать с малыми величинами этот результат можно получить следующим образом:

$$\lambda = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\frac{R}{r} + \left(\frac{R}{2r}\right)^2} \approx 1 - \sqrt{\frac{R}{r}}$$

На последнем шаге отброшен малые величины

Задание 10-3. Подводный телеграфный кабель.

1. Введение.

1.1 Сопротивление центральной медной жилы рассчитывается по известной формуле

$$R = \rho_0 \frac{L}{S} = \rho_0 \frac{4L}{\pi d^2} = 0{,}87\,\text{Ом} \ . \qquad (1)$$

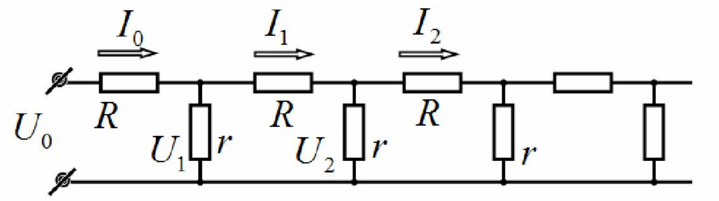
1.2 Для расчета сопротивления изоляции необходимо учесть, что ток идет поперек изоляционного слоя, поэтому это сопротивление равно

$$r = \rho_1 \frac{h}{2\pi d L} = 6{,}7 \cdot 10^6\,\text{Ом} \, . \qquad (2)$$

2. Уменьшение силы тока в кабеле и его утечка.

2.1 По определению электрического напряжения, для каждой ячейки, состоящей из двух резисторов r и одного резистора R напряжение может быть представлено в виде

$$U_k = I_k R + U_{k+1} \qquad (3)$$



Из этой формулы следует, что

$$I_k = \frac{U_k - U_{k+1}}{R} \qquad (4)$$

2.2 Рассматривая силы токов, входящих в каждый верхний узел цепи, можно записать

$$I_{k-1} = I_k + \frac{U_k}{r} \, . \qquad (5)$$

здесь $\frac{U_k}{r}$ - сила тока утечки в данном звене.

Если подставить выражения для сил токов (4) в формулу (5), то получим искомое соотношение между напряжениями

$$\frac{U_{k-1} - U_k}{R} = \frac{U_k}{r} + \frac{U_k - U_{k+1}}{R} \, . \qquad (6)$$

Его удобно представить в виде

$$U_{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right) U_k + U_{k+1} = 0 \, . \qquad (7)$$

2.3 Для проверки предположения о геометрической прогрессии, подставим явные выражения для напряжений $U_k = U_0 \lambda^k$ в формулу (7):

$$U_0 \lambda^{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right) U_0 \lambda^k + U_0 \lambda^{k+1} = 0 \, . \qquad (8)$$

После сокращения, получим квадратное уравнение для знаменателя прогрессии

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{R}{r}\right) \lambda + 1 = 0 \, . \qquad (9)$$

Таким образом, предположение о геометрической прогрессии выполняется, если ее знаменатель λ удовлетворяет уравнению (9). Решением этого уравнения являются числа

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{R}{2r} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} \qquad (10)$$

Из двух корней этого уравнения следует выбрать корень со знаком «минус», так как второй корень оказывается больше 1. В этом случае напряжения и, следовательно, силы токов должны возрастать до бесконечности, что физически не возможно.

Аккуратное вычисление параметра λ приводит к значению $\lambda = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$.

Обратите внимание на интересную «игру» малых величин: отношение сопротивлений, входящих в формулу (10) величина порядка 10^{-8}, найденный по этой формуле корень отличается от единицы на величину порядка 10^{-8}. При умении правильно работать с малыми величинами этот результат можно получить следующим образом:

$$\lambda = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\frac{R}{r} + \left(\frac{R}{2r}\right)^2} \approx 1 - \sqrt{\frac{R}{r}}$$

На последнем шаге отброшен малые величины, имеющие больший порядок, чем 0,5. Эта элементарная цепочка приближений дает тот же результат, что и громоздкий расчет по формуле (10)

2.4 Так как все наши расчеты приведены для одного звена длиной в 1 км, по расстоянию в 2000 км соответствует $N = 2000$ звеньев. С помощью формулы для геометрической прогрессии, находим, что убывание напряжения в кабеле равно

$$\frac{U_{2000}}{U_0} = (1 - \varepsilon)^N \approx 0{,}5 \qquad (11)$$

т.е примерно в 2 раза. Во столько же раз убывает и сила тока в кабеле.

Не смотря на то, что сопротивление утечки почти в 10 миллионов раз превышает сопротивлении основной жилы, на больших расстояния утечки тока оказываются существенными.

, имеющие больший порядок, чем 0,5.Эта элементарная цепочка приближений дает тот же результат, что и громоздкий расчет по формуле (10)

2.5 Так как все наши расчеты приведены для одного звена длиной в 1 км, по расстоянию в 2000 км соответствует $N = 2000$ звеньев. С помощью формулы для геометрической прогрессии, находим, что убывание напряжения в кабеле равно

$$\frac{U_{2000}}{U_0} = (1 - \varepsilon)^N \approx 0{,}5 \qquad (11)$$

т.е примерно в 2 раза. Во столько же раз убывает и сила тока в кабеле.

Не смотря на то, что сопротивление утечки почти в 10 миллионов раз превышает сопротивлении основной жилы, утечки тока оказываются существенными для длинного кабеля.