9 класс

2-й вариант

2-й тур = 2-й день

9.5. Положительные числа x_1, x_2, …, x_n таковы, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Докажите, что

$$\frac{x_1^2}{2x_1+3x_2}+\frac{x_2^2}{2x_2+3x_3}+\ldots+\frac{x_n^2}{2x_n+3x_1}>\frac{1}{12}.$$

Решение. Заметим, что $\frac{a^2}{2a+3b}>\frac{2a-b}{12}$ для любых положительных a и b. Действительно,

$$\frac{a^2}{2a+3b}-\frac{2a-b}{12}=\frac{12a^2-4a^2-4ab+3b^2}{12(2a+3b)}=$$

$$=\frac{8a^2-4ab+3b^2}{12(2a+3b)}=\frac{(2a-b)^2+4a^2+2b^2}{12(2a+3b)}>0.$$

Поэтому

$$\frac{x_1^2}{2x_1+3x_2}+\frac{x_2^2}{2x_2+3x_3}+\ldots+\frac{x_n^2}{2x_n+3x_1}>$$

$$>\frac{2x_1-x_2}{12}+\frac{2x_2-x_3}{12}+\ldots+\frac{2x_n-x_1}{12}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{12}=\frac{1}{12},$$

что и требовалось доказать.

9.6. Пусть на плоскости даны 50 различных точек с целыми координатами. Докажите, что существует отрезок, соединяющий какие-то две данные точки, и на котором лежит не менее семи точек с целыми координатами (с учетом концевых точек; при этом все эти семь точек не обязательно входят в число заданных).

Схема решения. Поскольку с учетом «концевых точек» отрезок должен содержать еще пять точек с целыми координатами, то всего на отрезке будет 7 «целочисленных» точек. При делении на семь возможны семь остатков – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. При делении абсцисс точек на 7 возможны семь остатков, при делении ординат точек на 7 так же возможны семь остатков, значит, различных пар остатков, которые можно полученных при делении обеих координат точек на 7 будет всего 7×7=49. Поэтому если точек будет 50, то среди этих 50 точек найдется по крайней мере две точки, обе координаты которых при делении на 7 дают равные остатки, т.е. имеют вид: $M_1(7l_1 + r_1;\ 7l_2 + r_2)$, $M_2(7m_1 + r_1;\ 7m_2 + r_2)$. Точки, делящие отрезок M_1M_2 на семь равных частей, будут иметь целые координаты.

9.7. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC взяты точки E и D соответственно так, что $AD:DC = BE:EA = 1:2$. Пусть F - точка пересечения отрезков BD и CF. Докажите, что прямые AF и CE пересекаются под прямым углом.

Решение. По условию задачи точки E и D на сторонах правильного треугольника ABC выбраны так, что $BE = AD = \frac{1}{2}AE$.

Повернем треугольник ABC вокруг точки A на угол 120^{o}. В результате получим еще один правильный треугольник AB_1C_1 (через B_1, C_1 и E_1 мы обозначаем образы точек B, C и E при указанном преобразовании, рис.

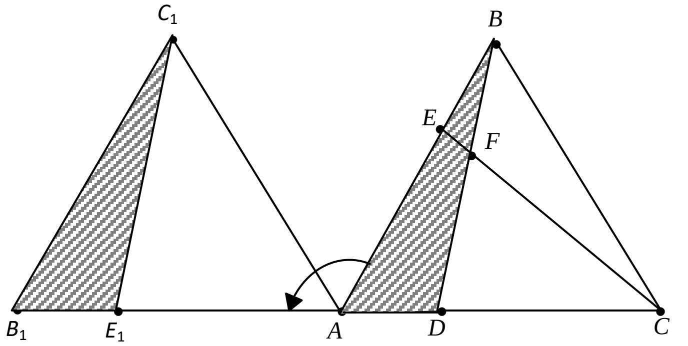

Рис. 1

1). Очевидно, отрезки B_1A и AC будут лежать на одной прямой.

Заметим, что $\Delta ABC = \Delta B_1C_1A$. Отсюда $BD = C_1E_1$ и $BD \parallel C_1E_1$. Но отрезок C_1E_1 получен из отрезка CE в результате поворота на угол 120^{o}, поэтому угол между отрезками BD и CE в исходном треугольнике ABC также равен 120^{o}. Отсюда следует, что вокруг четырехугольника $AEFD$ можно описать окружность.

Пусть $AB = a$, тогда $AD = \frac{1}{3}a$, $AE = \frac{2}{3}a$. Применив к треугольнику AED последовательно теорему косинусов (это позволяет выразить через a длину отрезка ED) и теорему, обратную теореме Пифагора, приходим к заключению, что $ED \perp AC$.

Следовательно, в окружности, описанной вокруг четырехугольника $AEFD$, AE – диаметр. Но тогда $\angle AFE = 90^{o}$ как вписанный и опирающийся на диаметр, т. е. $AF \perp CE$.

9.8. Про высший совет магов известно два факта:

1) каждый член высшего совета дружит ровно с десятью другими членами высшего совета;

2) для любых десяти членов высшего совета найдется 11-тый, который дружит с каждым из этих десяти.

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?
Ответ: 11.

Решение. Одиннадцать быть может, если каждый член высшего совета дружит с каждым.

Покажем, что не может быть 12. Допустим противное, и в высшем совете имеется не менее 12 магов. Тогда среди них найдется двое X_1 и X_2, не дружащих друг с другом. Выберем десять членов высшего совета магов X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}. Согласно факту 2 найдется член высшего совета Y, который дружит с X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}. И точно также найдется член высшего совета Z, который дружит с X_1, Y, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}. Заметим, что Z не может быть X_2, так как X_2 не дружит с X_1. Получили, что Y нашлось 11 друзей среди членов высшего совета – это X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10} и Z. Получили противоречие первому факту, значит, предположение неверно и в высшем совете не имеется 12 магов.