

1. Дана последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, \dots , члены которой при каждом натуральном $i \geq 3$ удовлетворяют равенству

$$a_{i+1} = a_i + \text{НОД}(a_{i-1}, a_{i-2}).$$

Докажите, что существуют такие натуральные числа N и M , что при всех $n \geq N$ верно равенство $a_{n+1} - a_n = M$.

2. Через точку $F(1; 1)$ координатной плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Одна из прямых пересекает правую ветвь гиперболы $y = \frac{1}{2x}$ в точках A и C (y_C абсцисса больше, чем у A). А другая прямая пересекает левую ветвь этой гиперболы в точке B , а правую — в точке D . Произведение проекций отрезков AC и BD на ось абсцисс равна m .

Найдите площадь невыпуклого четырёхугольника $ABCD$.

3. На окружности отметили 2021 точку и провели 2021 отрезок с концами в отмеченных точках. После этого вычислили количество различных точек, в которых пересекаются проведённые отрезки (концы отрезков не считаются точками пересечения).

Найдите наибольшее количество точек пересечения, которое могло получиться.

4. На плоскости даны три окружности ω_1, ω_2 , и ω_3 с центрами O_1, O_2 , и O_3 соответственно, причём ω_1 касается внешним образом ω_2 и ω_3 в точках P и Q соответственно. На окружности ω_1 выбирается произвольная точка C . Прямая CP повторно пересекает ω_2 в точке B , а прямая CQ повторно пересекает ω_3 в точке A . Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC .

Докажите, что, если точка C пробегает окружность ω_1 , то геометрическое место точек O — окружность, центр которой лежит на описанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$.