Республиканская физическая олимпиада 2022 года
(Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач
10 класс
(для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

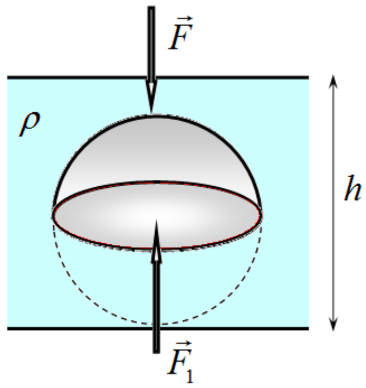
Задание 1. Архимедова разминка.

Данная задача состоит из двух не связанных между собой задач.

Задача 1.1 Шар на дне сосуда.

1.1.1 Рассчитать непосредственно силу давлении воды на половину шара достаточно сложная математическая задача: давление зависит от глубины, направление силы давления также изменяется от точки к точке.

Поэтому для расчета искомой силы можно применить простой искусственный прием. Мысленно разрежем шар по диаметру и уберем нижнюю половину. После такой «операции» искомая сила давления на верхнюю половину поверхности шара $\vec{F}$ не изменится. Но легко можно найти силу давления на «срез» шара:



$$F_1 = PS = \rho g(4R - R) \cdot \pi R^2 = 3\pi R^3 \rho g\ . \qquad (1)$$

Векторная сумма сил давления на верхнюю половину и на нижний «срез» равна силе Архимеда, действующей на половину шара, поэтому

$$F_A = F_1 - F\ . \qquad (2)$$

Из этого уравнения с учетом формулы для силы Архимеда находим:

$$F = F_1 - F_A = 3\pi R^3 \rho g - \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g = \frac{7}{3}\pi R^3 \rho g\ . \qquad (3)$$

Задача 1.2 Однородный стержень в неоднородной жидкости.

1.2.1 – 1.2.2 Так как искомая зависимость плотности от глубины погружения является линейной, то она описывается формулой

$$\rho(z) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{l} z\ . \qquad (1)$$

Чтобы тело плавало, необходимо, что сила Архимеда могла уравновесить силу тяжести.
Сила тяжести, действующая на стержень равна

$$mg = \rho_0 l S g\,, \qquad (2)$$

где S - площадь поперечного сечения стержня.

Сила Архимеда равна силе тяжести, действующей на вытесненный объем воды. Так плотность воды изменяется по линейному закону, то при расчете массы столбика вытесненной воды можно использовать ее среднюю плотность, равную среднему арифметическому плотностей на ее краях, или равной ей плотности на середине столбика. Поэтому при погружении нижнего конца стержня на глубину z, действующая на него сила Архимеда будет равна

$$F_A = \frac{\rho_1 + \rho(z)}{2} zSg = \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2l} z\right) zSg\ . \qquad (3)$$

Из условия плавания следует уравнение для определения глубины погружения:

$$\rho_0 l = \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2l} z\right) z \,. \tag{4}$$

Предельным случаем плавания является $z = l$. Поэтому условием плавания является выполнение очевидного условия:

$$\rho_0 l < \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2l} l\right) l = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} l \,. \tag{5}$$

Или

$$\rho_0 < \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} \,. \tag{6}$$

Для определения глубины погружения необходимо решить уравнение (4), из которого следует, что

$$z = l \frac{\sqrt{\rho_1^2 + 2\rho_0(\rho_2 - \rho_1)} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \,. \tag{7}$$

1.2.3 Что бы вертикальное плавание было устойчиво, необходимо, чтобы центр масс стержня находился глубже, чем центр масс вытесненного столбика воды. При полном погружении стержня его центр масс погружается на глубину $\frac{l}{2}$. Чтобы центр масс вытесненной воды находился выше этой точки необходимо, чтобы плотность жидкости у поверхности была больше, чем плотность жидкости у дна, т.е.

$$\rho_2 < \rho_1 \,. \tag{8}$$

В этом случае жидкость в поле тяжести станет неустойчивой, начнется ее перемешивание, поэтому реализовать такой эксперимент нельзя.

Задание 2. Знаете ли Вы МКТ?

Часть 1. Всего один шарик.

При расчете сил давления следует использовать следующую основную идею: средняя сила равна отношению импульса, полученного телом, к промежутку времени, в течение которого этот импульс был получен:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \,. \tag{1}$$

1.1 При выполнении условия $v_0^2 < 2gh$ шарик не будет ударятся о крышку сосуда. В момент каждого удара о дно сосуда он будет передавать дну импульс

$$\Delta p = 2mv_0 \tag{2}$$

При равноускоренном движении в поле тяжести земли зависимость вертикальной координаты шарика имеет вид

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \,. \tag{3}$$

Поэтому время между двумя последовательными ударами можно легко найти из выражения (2), полагая $z = 0$. Тогда время между ударами оказывается равным

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g}. \tag{4}$$

А средняя сила давления шарика на дно сосуда равна (как ни странно!?):

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = mg. \tag{5}$$

1.2 Если скорость шарика у дна $v_0 > \sqrt{2gh}$, то он будет ударяться и о верхнюю крышку сосуда. Скорость шарика при ударе о крышку рассчитывается по формуле

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \tag{6}$$

Так как движение шарика между ударами является равноускоренным, то время подъема шарика и равное ему время падения оказывается равным

$$\tau = \frac{h}{\frac{1}{2}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}\right)} = \frac{2h}{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}. \tag{7}$$

Тогда средняя сила давления шарика на дно равна

$$F_1 = \frac{2mv_0}{2\tau} = \frac{mv_0}{2h}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}\right). \tag{8}$$

Сила давления на крышку рассчитывается аналогично:

$$F_2 = \frac{2mv_1}{2\tau} = \frac{m\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{2h}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}\right). \tag{9}$$

Разность этих сил опять равна

$$F_2 - F_1 = mg. \tag{10}$$

Часть 2. Очень много молекул.

2.1 Средняя квадратичная скорость молекул рассчитывается по известной формуле

$$\langle v_{кв.} \rangle = \sqrt{3\frac{RT}{M}} \tag{11}$$

Так как все направления в пространстве равноправны, то

$$\langle v_{кв.x} \rangle = \langle v_{кв.y} \rangle = \langle v_{кв.z} \rangle.$$

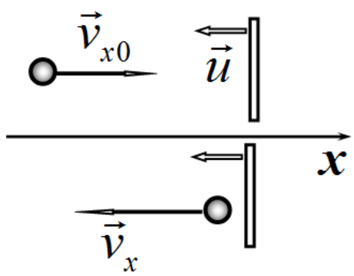
Кроме того,

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2.$$

Поэтому

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle v_{кв.x} \rangle = \sqrt{\frac{RT}{M}}. \tag{12}$$

2.2 При ударе молекулы о поршень изменяется только та проекция вектора скорости, которая перпендикулярна плоскости поршня. Поэтому направим ось x перпендикулярно поршню, вдоль оси сосуда. Рассмотрим молекулу, которая налетает на поршень, имея компоненту скорости, перпендикулярную пластине v_{x0}. Если скорость поршня равна u и направлена



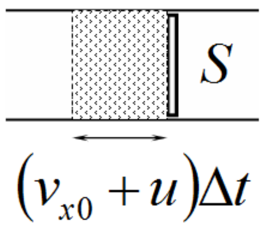
навстречу налетающей молекуле, то после абсолютно упругого удара проекция скорости молекулы станет равной

$$v_x = -v_{x0} - 2u \qquad (13)$$

Это соотношение легко доказать, рассматривая упругий удар в системе отсчета, связанной с поршнем, а затем вернувшись в систему отсчета, связанную с сосудом.

Изменение проекции импульса молекулы при ударе равно (m - масса одной молекулы)

$$\Delta p_x = -m(v_{x0} + 2u) - mv_{x0} = -2m(v_{x0} + u). \qquad (14)$$



Такой же по модулю, но противоположно направленный импульс получит поршень. Предположим, что у всех молекул модуль проекции скорости на ось равна v_{x0}. Тогда за малый промежуток времени Δt до поршня долетят те молекулы, которые находятся на расстоянии меньшем, чем $(v_{x0} + u)\Delta t$.

Число этих молекул равно

$$\Delta N = \frac{1}{2} nS(v_{x0} + u)\Delta t. \qquad (15)$$

Здесь n - концентрация молекул, также учтено, что в направлении стенки летят половина молекул. Эти молекулы предадут стенке импульс, равный

$$\Delta p_\Sigma = \frac{1}{2} nS(v_{x0} + u)\Delta t \cdot 2m(v_{x0} + u) = mn(v_{x0} + u)^2 S\Delta t. \qquad (16)$$

Теперь можно провести усреднение по скоростям молекул:

$$\Delta p_\Sigma = \left\langle mn(v_{x0} + u)^2 \right\rangle = mn\left(\left\langle v_{x0}^2 \right\rangle + 2\left\langle v_{x0} \right\rangle u + u^2\right) S\Delta t. \qquad (17)$$

В соответствии с общим подходом, средняя сила, действующая на поршень с одной стороны, равна

$$F_1 = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} = mn\left(\left\langle v_{x0}^2 \right\rangle + 2\left\langle v_{x0} \right\rangle u + u^2\right) S. \qquad (18)$$

Понятно, что для вычисления силы, действующей на вторую сторону поршня достаточно в формуле (18) заменить знак скорости u:

$$F_2 = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} = mn\left(\left\langle v_{x0}^2 \right\rangle - 2\left\langle v_{x0} \right\rangle u + u^2\right) S. \qquad (19)$$

Разность этих сил и есть сила, действующая на поршень со стороны газа:

$$F = F_1 - F_2 = 4mn\left\langle v_{x0} \right\rangle uS. \qquad (20)$$

Осталось выразить величины, входящие в эту формулу, через величины, заданные в условии задачи:

$$m = \frac{M}{N_A}; \quad n = \frac{P_0}{kT_0}; \quad \left\langle v_x \right\rangle = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}. \qquad (21)$$

В итоге получаем:

$$F = 4mn\left\langle v_{x0} \right\rangle uS = 4\frac{M}{N_A}\frac{P_0}{kT_0}\sqrt{\frac{RT_0}{M}} Su = 4P_0\sqrt{\frac{M}{RT_0}} Su. \qquad (22)$$

2.3 Используя формулу (13), найдем изменение кинетической энергии молекулы при ударе (слагаемое пропорциональное u^2 можно опустить):

$$\Delta E_1 = \frac{m}{2}(v_{x0} + u)^2 - \frac{m}{2}(v_{x0})^2 = mv_{x0}u \qquad (23)$$

Тогда за малый промежуток времени Δt изменение энергии всего газа равно (усреднение проводим сразу):

$$\Delta E_{\Sigma} = \left\langle \frac{1}{2} nSv_{x0}\Delta t \cdot mv_{x0}u \right\rangle = \frac{1}{2} mn\left\langle v_{x0}^2 \right\rangle uS\Delta t = \frac{1}{2} mn\left\langle v_{x0}^2 \right\rangle S\Delta x = \frac{1}{2} P_0 \cdot S\Delta x . \quad (24)$$

Это же изменение энергии можно выразить через изменение абсолютной температуры газа:

$$\Delta E = \frac{3}{2} R\Delta T . \quad (25)$$

Приравнивая эти выражения, находим изменение температуры газа:

$$\Delta T = \frac{1}{3}\frac{P_0 \cdot S\Delta x}{R} . \quad (26)$$

Задача 3. Электромобиль.

Часть 1. Движение по твердой горизонтальной поверхности.

1.1 Запишем уравнения, описывающие движение электромобиля в установившемся режиме.

Первое. При движении с постоянной скоростью сила тяги, развиваемая двигателем, точно уравновешивает силу сопротивления воздуха, поэтому

$$kI = \beta v^2 . \quad (1)$$

Второе. Так как при работе двигателя в его обмотке возникает неизвестная (или трудно рассчитываемая) ЭДС самоиндукции, то использовать закон Ома для определения силы тока в цепи невозможно. Поэтому вместо этого закона следует воспользоваться законом сохранения энергии: энергия, выдаваемая источником тока $U_0 I$, расходуется на теплоту, выделяющейся на резисторе $I^2 R$ и на работу по преодолению сил сопротивления $F_c v = \beta v^3$, следовательно:

$$U_0 I = I^2 R + \beta v^3 . \quad (2)$$

Для того, чтобы получить систему уравнений в «безразмерном» виде, перепишем уравнения (1) – (2) для двух крайних случаев, описанных в условии задачи. При застопоренном двигателе скорость автомобиля равна нулю. В этом случае сила тока будет минимальна при максимальном сопротивлении резистора. Поэтому

$$I_1 = \frac{U_0}{R_{\max}} \quad \Rightarrow \quad R_{\max} = \frac{U_0}{I_1} . \quad (3)$$

Скорость электромобиля будет максимальна при нулевом сопротивлении резистора, в этом случае

$$\begin{gathered} U_0 I_0 = \beta v_{\max}^3 \\ kI_0 = \beta v_{\max}^2 \end{gathered} . \quad (4)$$

Выразим значения сопротивления резистора, скорости электромобиля и силы тока в цепи через указанные в условии безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} R &= xR_{\max} \\ v &= yv_{\max} \\ I &= zI_0 \end{aligned} \quad (5)$$

и подставим их в исходные уравнения. Тогда из уравнения (1) следует

$$kI = \beta v^2 \quad \Rightarrow \quad kI_0 z = \beta v_{\max}^2 y^2 . \quad (6)$$

Тогда с учетом (4), получим

$$z = y^2 . \tag{7}$$

Подстановка (5) в уравнение (2) дает

$$U_0 I = I^2 R + \beta v^3 \quad \Rightarrow \quad U_0 I_0 z = I_0^2 R_{\max} z^2 x + \beta v_{\max}^3 y^3 \quad \Rightarrow \quad U_0 I_0 z = I_0^2 \frac{U_0}{I_1} z^2 x + \beta v_{\max}^3 y^3 .$$

При учете соотношения (4), получаем окончательно

$$z = \frac{I_0}{I_1} z^2 x + y^3 \quad \Rightarrow \quad z^2 x + \gamma y^3 - \gamma z = 0 \tag{8}$$

Таким образом, уравнения (7) и (8) образуют искомую систему для расчета требуемых зависимостей.

1.2 Найти решение полученной системы довольно просто. Подставим значение z из уравнения (7) в уравнение (8):

$$y^4 x + \gamma y^3 - \gamma y^2 = 0 \tag{9}$$

После сокращения, получаем квадратное уравнение

$$y^2 x + \gamma y - \gamma = 0 \tag{10}$$

Положительный корень, которого равен:

$$y(x) = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma x} - \gamma}{2x} . \tag{11}$$

Заметим, что при $x \to 0$ $y \to 1$.

1.3 Зависимость $z(x)$ следует из уравнения (7):

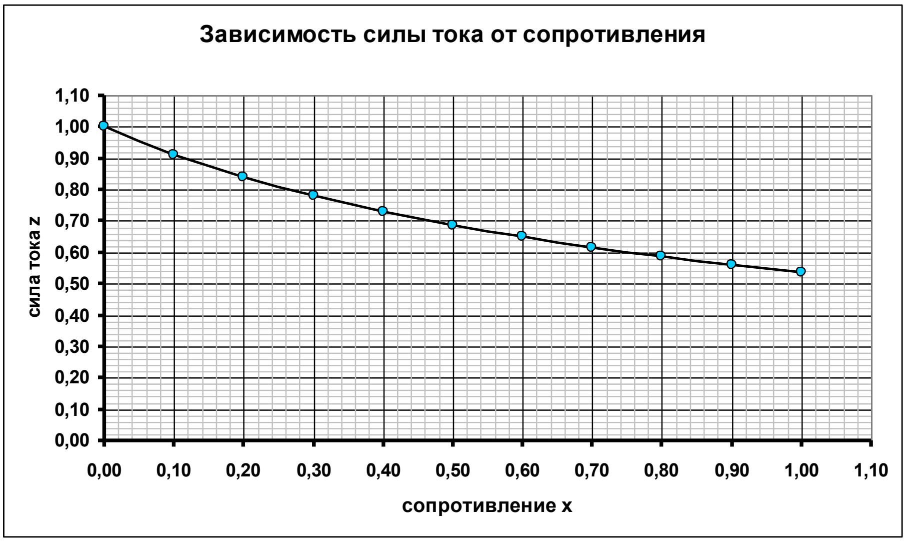
$$z(x) = y^2 = \left(\frac{\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma x} - \gamma}{2x} \right)^2 \tag{12}$$

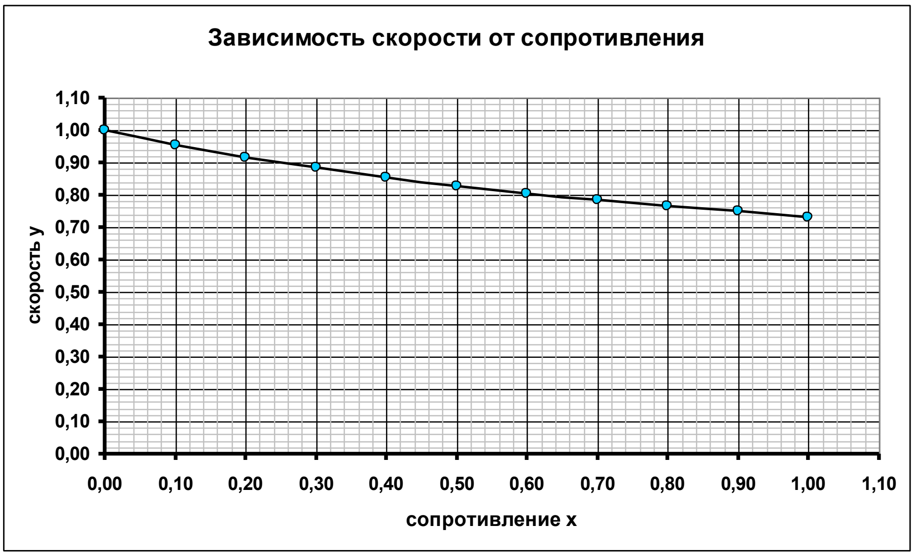
1.4 В данном случае под КПД следует понимать отношение мощности двигателя к мощности, развиваемой источником тока, поэтому

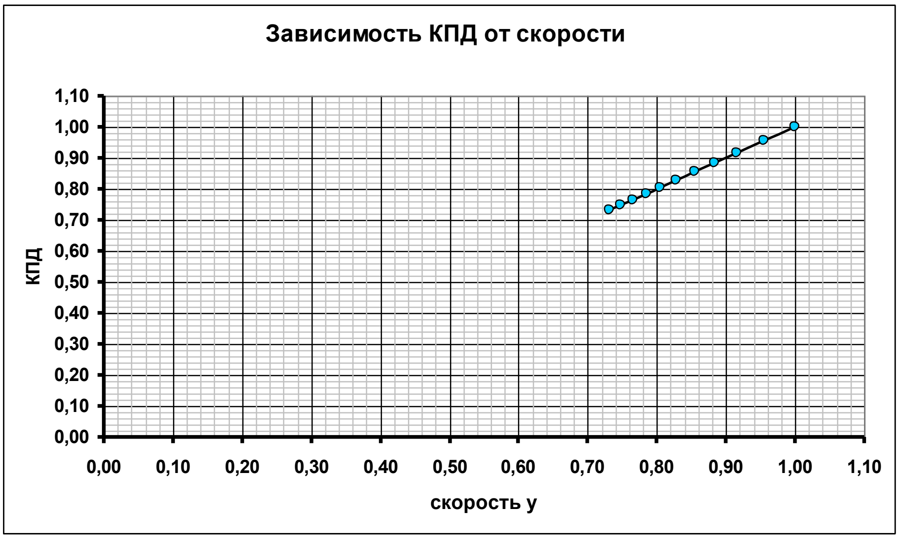
$$\eta = \frac{\beta v^3}{U_0 I} = \frac{\beta v_{\max}^3 y^3}{U_0 I_0 z} = \frac{y^3}{z} = y . \tag{13}$$

1.5 Необходимые расчеты по полученным формулам приведены в таблице, по которой построены требуемые графики.

Сопротивление, x	Скорость y	Сила тока, z	КПД, η
0,00	1,00	1,00	1,00
0,10	0,95	0,91	0,95
0,20	0,92	0,84	0,92
0,30	0,88	0,78	0,88
0,40	0,85	0,73	0,85
0,50	0,83	0,69	0,83
0,60	0,81	0,65	0,81
0,70	0,78	0,62	0,78
0,80	0,77	0,59	0,77
0,90	0,75	0,56	0,75
1,00	0,73	0,54	0,73


Зависимость силы тока от сопротивления
сила тока z
1,10
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
0,00
0,10
0,20
0,30
0,40
0,50
0,60
0,70
0,80
0,90
1,00
1,10
сопротивление x


Зависимость скорости от сопротивления
скорость y
1,10
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
0,00
0,10
0,20
0,30
0,40
0,50
0,60
0,70
0,80
0,90
1,00
1,10
сопротивление x


Зависимость КПД от скорости
КПД
1,10
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
0,00
0,10
0,20
0,30
0,40
0,50
0,60
0,70
0,80
0,90
1,00
1,10
скорость y

Часть 2. Движение электромобиля по ковру.

2.1 При появлении постоянной силы трения качения исходные уравнения преобразуются следующим очевидным образом:

$$kI = F_{тр.} + \beta v^2. \quad (14)$$

$$U_0 I = I^2 R + F_{тр.} v + \beta v^3. \quad (15)$$

Учитывая, что по условию $F_{тр.} = \varepsilon \beta v_{\max}^2$, и проведя аналогичный переход к безразмерным уравнениям, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} z &= \varepsilon + y^2 \\ z &= \frac{1}{\gamma} z^2 x + \varepsilon y + y^3 \end{aligned} \quad (16)$$

Когда электромобиль только начинает двигаться, его скорость еще равна нулю, поэтому и $y = 0$. Тогда из системы уравнений (16) легко найти:

$$\begin{cases} z = \varepsilon \\ z = \dfrac{1}{\gamma} z^2 x \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\gamma}{\varepsilon} = 20 \quad (17)$$

Найденное значение больше максимального значения сопротивления резистора. Поэтому электромобиль сдвинется при любом возможном значении сопротивления резистора.

2.2 Как и ранее, максимальная скорость автомобиля будет достигаться при нулевом сопротивлении переменного резистора, т.е. при $x = 0$. В этом случае система (16) преобразуется к виду

$$\begin{cases} z = \varepsilon + y^2 \\ z = \varepsilon y + y^3 \end{cases} \Rightarrow \quad \varepsilon + y^2 = \varepsilon y + y^3 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad (18)$$

То есть максимальная скорость движения электромобиля при появлении силы трения качения не изменится.