

LXXII Белорусская математическая олимпиада школьников

9 класс

1. На левой ветви гиперболы  $y = \frac{1}{x}$  отмечены точка  $A$ , а на правой – точка  $C$ . Перпендикуляры, восстановленные к отрезку  $AC$  в точках  $A$  и  $C$  второй раз пересекают гиперболу в точках  $B$  и  $D$  соответственно. Пусть  $E$  – точка пересечения прямых  $AC$  и  $BD$ ; точка  $O$  – начало координат.

Докажите, что  $k_{OE} + k_{AB} = 0$ , где  $k_{OE}$  и  $k_{AB}$  – коэффициенты наклона прямых  $OE$  и  $AB$  соответственно.

2. Дана окружность и точка  $P$  вне ее. Для каждого диаметра  $BC$  данной окружности (точки  $B$ ,  $C$  и  $P$  не лежат на одной прямой) построена описанная окружность треугольника  $PBC$ .

Докажите, что независимо от выбора диаметра  $BC$  все эти описанные окружности проходят через две фиксированные точки плоскости.

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел  $n$  таких, что

$$\begin{aligned}n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\n &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4,\end{aligned}$$

где  $a_1, a_2, a_3, a_4$  – некоторые натуральные попарно взаимно простые числа и  $b_1, b_2, b_3, b_4$  – некоторые натуральные попарно взаимно простые числа, причем

$$\begin{aligned}a_1 &\geq a_2 \geq a_3 \geq a_4, \\b_1 &\geq b_2 \geq b_3 \geq b_4, \\a_1 &> b_1\end{aligned}$$

и

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4.$$

4. Дана квадратная таблица, в каждой клетке которой записано целое число. Влад и Никита играют в игру, делая ходы поочередно. Первым ходит Никита. За один ход он выбирает столбец таблицы и поэлементно прибавляет к нему или вычитает из него любой другой столбец таблицы. Влад за один ход проделывает аналогичную операцию, только со строками. Влад выиграет, если после очередного хода кого-либо из игроков в таблице окажется строка или столбец, состоящий из нулей.

Может ли Влад добиться победы независимо от игры Никиты? Если да, то как он должен играть, если исходная таблица имеет вид

а) 

1	2
3	4

 ?

б) 

2	9	4
7	5	3
6	1	8

 ?

Пользоваться калькулятором не разрешается.  
Время работы: 5 часов