

LXXII Белорусская математическая олимпиада школьников

11 класс

1. Дана окружность ω с центром O и точка P вне ее. На окружности отмечена точка B , причем O , B и P не лежат на одной прямой. На радиусе OB отмечена точка C так, что $OC : CB = 2 : 3$. Около треугольника PBC построена описанная окружность.

Докажите, что независимо от выбора точки B все эти окружности проходят через одну точку, отличную от P .

2. На левой ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$ отмечены точки A и B , а на правой ветви – точки C и D . Оказалось, что прямые AB и CD параллельны. Пусть E – точка пересечения прямых AC и BD , а F – точка пересечения прямых AD и BC .

Докажите, что прямая EF проходит через начало координат.

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что

$$\begin{aligned}n &= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, \\n &= b_1 \cdot b_2 \cdot b_3,\end{aligned}$$

для некоторых натуральных *попарно взаимно простых* чисел a_1, a_2, a_3 и натуральных *попарно взаимно простых* чисел b_1, b_2, b_3 , причем

$$\begin{aligned}a_1 &\geq a_2 \geq a_3, \\b_1 &\geq b_2 \geq b_3, \\a_1 &> b_1\end{aligned}$$

и

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

4. Найдите все функции f , определенные на на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых равенство

$$f(x + xy) + 2xy + f(y) = f(x + y) + 2yf(x) + f(xy)$$

выполняется для всех действительных значений x и y .

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов