

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

11 класс

1. Найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие при всех действительных значениях переменных  $x$  и  $y$  равенству

$$f(x - 0,25) + f(y - 0,25) = f(x + [y + 0,25]) - 0,25$$

(Через  $[x]$  как обычно обозначена целая часть числа  $x$ .)

2. Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на сторонах  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ , соответственно, остроугольного треугольника  $ABC$ . Обозначим точки пересечения отрезков  $BB_1$  и  $CC_1$ ,  $CC_1$  и  $AA_1$ ,  $AA_1$  и  $BB_1$ , через  $P$ ,  $Q$  и  $R$  соответственно. Известно, что треугольник  $PQR$  подобен треугольнику  $ABC$ .

Докажите, что двойное равенство  $\angle AB_1C_1 = \angle BC_1A_1 = \angle CA_1B_1$  возможно только, если треугольник  $ABC$  равносторонний.

3. Дан многочлен  $P(x)$  степени 2021 с действительными коэффициентами, такой что какое бы действительное число  $a$  ни выбрать, у многочлена  $x^{2022} + aP(x)$  есть хотя бы один действительный корень.

Найдите все возможные значения числа  $P(0)$ .

4. Государство состоит из 2021 города, между некоторыми из которых есть прямые авиаперелёты. Каждая пара городов соединена не более, чем одним прямым перелётом, а каждый перелёт обслуживается одной из 2021 авиакомпаний. Набор городов назовём *неполным*, если хотя бы одна авиакомпания не осуществляет ни одного прямого перелёта между ними.

Найдите наибольшее число  $m$ , такое что гарантированно найдётся неполный набор из  $m$  городов.

---

Пользоваться калькулятором не разрешается.  
Время работы: 5 часов